

14. Образующая конуса равна диаметру его основания. В основание конуса вписан правильный треугольник. Через середину высоты конуса и сторону треугольника проведена плоскость  $\alpha$ .

а) Докажите, что угол между плоскостью основания конуса и плоскостью  $\alpha$  равен  $60^\circ$ .

б) Найдите площадь сечения плоскостью  $\alpha$  шара, вписанного в конус, если радиус основания конуса равен  $4\sqrt{3}$ .

Дано:

$$AS=AF$$

$$OK=KS$$

ABC – правильный треугольник

а) Доказать:  $\angle KEO=60^\circ$

Доказательство.

Все углы правильного треугольника равны  $60^\circ$

Точка О является центром вписанной и описанной окружности. Медиана АЕ является и высотой, и биссектрисой треугольника ABC. Тогда АЕ делится точкой О в отношении 2:1. Значит, ОЕ равно половине АО. Но  $OF=AO$ , поэтому точка Е будет серединой OF. Из теоремы о пропорциональных отрезках на сторонах угла следует, что  $KC \parallel SF$ . Тогда

$$\angle KEO = \angle SFA = 60^\circ$$

Что и требовалось доказать.

б) Дано:

$$OF = 4\sqrt{3}$$

Найти: S

Пусть М – центр шара. Исходя из рассуждений аналогичных пункту а), получаем, что

$$MO = \frac{1}{3}SO$$

$$\frac{SO}{OF} = \operatorname{tg} \angle SFO$$

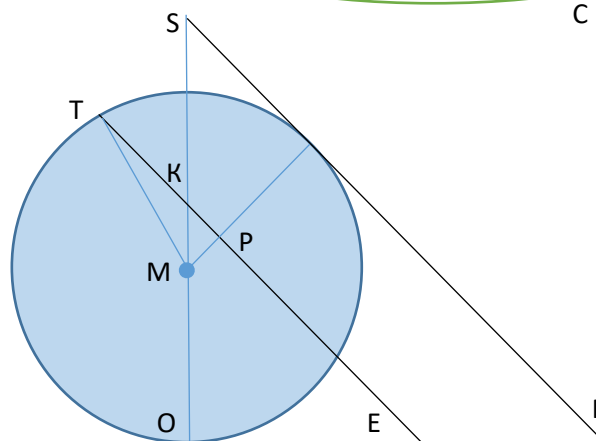
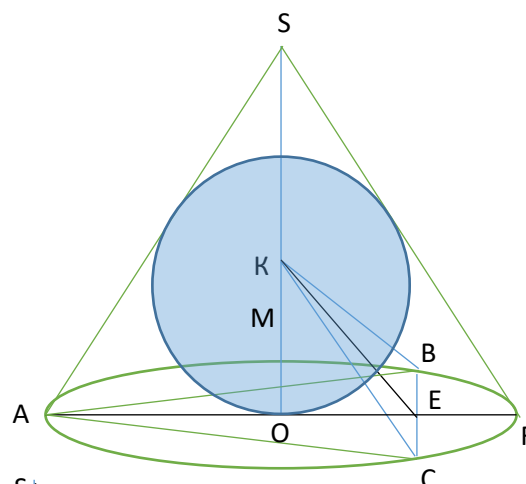
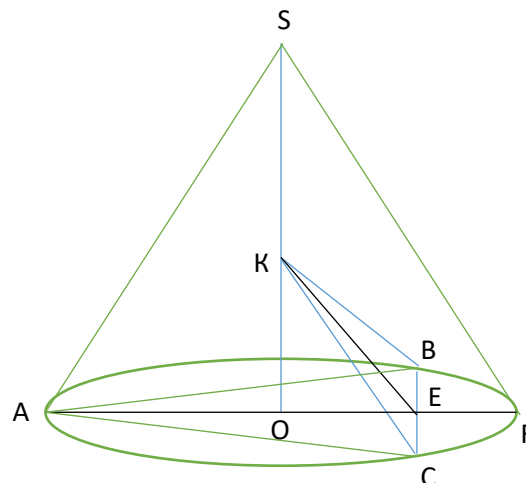
$$SO = OF \operatorname{tg} \angle SFO = OF \operatorname{tg} 60^\circ = 4\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} = 12$$

$$MO = \frac{1}{3} \cdot 12 = 4$$

$$KO = \frac{1}{2}SO = \frac{1}{2} \cdot 12 = 6$$

$$KM = KO - MO = 6 - 4 = 2$$

Проведем  $MP \perp ET$ .



$\angle KMP = \angle KEO$  (углы с соответственно перпендикулярными сторонами)

$$MP = KM \cos \angle KMP = 2 \cdot \cos 60^\circ = 1$$

По теореме Пифагора находим радиус сечения

$$r^2 = TP^2 = TM^2 - MP^2 = MO^2 - MP^2 = 16 - 1 = 15$$

Тогда искомая площадь сечения находится как площадь круга

$$S = \pi r^2 = 15\pi \text{ (кв. ед)}$$