

1) Решить уравнение:  $\begin{cases} y' - \frac{6}{x}y = x^7 - 4x^4 \\ y(1) = 0 \end{cases}$

1.1. Находим общее решение соответствующего однородного уравнения

$$y' - \frac{6y}{x} = 0 \Leftrightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{6y}{x} \Leftrightarrow \frac{dy}{y} = \frac{6dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x^6 + \ln C \Rightarrow y = Cx^6.$$

1.2. Методом вариации произвольной постоянной  $C = C(x)$  находим общее решения уравнения  $y' - \frac{6y}{x} = x^7 - 4x^4$ :  $y = C(x)x^6$ ;  $y' = C'(x)x^6 + 6C(x)x^5$ ;

$$C'(x)x^6 + 6C(x)x^5 - \frac{6C(x)x^6}{x} = x^7 - 4x^4; C'(x)x^6 = x^7 - 4x^4; C'(x) = x - 4x^{-2};$$

$$C(x) = \int (x - 4x^{-2}) + C_2 = \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x} + C_1; y = \left( \frac{x^2}{2} + \frac{4}{x} + C_1 \right) x^6 = \frac{x^8}{2} + 4x^5 + C_1x^6.$$

1.3. Находим решение, удовлетворяющее условию  $y(1) = 0$ :

$$\frac{1}{8} + 4 + C_1 = 0; C_1 = -\frac{33}{8} = -4\frac{1}{8} \text{ и}$$

$$y = \frac{x^8}{2} + 4x^5 - 4\frac{1}{8}x^6.$$

2) Решить уравнение:  $y'' - 9y = 5\cos 2x$ .

1.1. Находим общее решение соответствующего линейного однородного уравнения

$$y'' - 9y = 0.$$

Составляем характеристическое уравнение  $k^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow k^2 = 9$ ;  $k_1 = 3$ ,  $k_2 = -3$ .

Общее решение уравнения  $y'' - 9y = 0$ :  $y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x}$ .

1.2. Частное решение уравнения  $y'' - 9y = \cos 2x$  ищем в виде  $y = A\cos 2x + B\sin 2x$ .

$$y' = -2A\sin 2x + 2B\cos 2x; y'' = -4A\cos 2x - 4B\sin 2x;$$

$$-4A\cos 2x - 4B\sin 2x - 9A\cos 2x - 9B\sin 2x = \cos 2x \Rightarrow -13A = 1; -13B = 0;$$

$$A = -\frac{1}{13}; B = 0. \text{ Частное решение уравнения } y'' - 9y = \cos 2x: y = -\frac{1}{13}\cos 2x.$$

1.3. Общее решение уравнения  $y'' - 9y = \cos 2x$  равно сумме решений 1.1. и 1.2.:

$$y = C_1e^{3x} + C_2e^{-3x} - \frac{1}{13}\cos 2x.$$

3) Найти экстремумы функции :  $z=3x^3+3y^3-9xy+10$ .

Необходимым условием существования экстремума в точке  $z_0 = z(x_0, y_0)$  – это

$\frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial x} = \frac{\partial z(x_0, y_0)}{\partial y} = 0$ . Точки  $(x_0, y_0)$ , удовлетворяющие этому условию, называются стационарными. Найдём стационарные точки.

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x} = 9x^2 - 9y; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 9y^2 - 9x. \quad \begin{cases} 9x^2 - 9y = 0 \\ 9y^2 - 9x = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y = 0 \\ y^2 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x^4 - x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} y = x^2 \\ x(x-1)(x^2+x+1) = 0 \end{cases}. \end{aligned}$$

Из 2-го уравнения последней системы:  $x_1 = 0, y_1 = 0; x_2 = 1, y_2 = 1$  и

$x^2 + x + 1 = 0, D = 1^2 - 4 \cdot 1 = -3 < 0$ , т.е. уравнение  $x^2 + x + 1 = 0$  не имеет действительных корней. Таким образом, функция  $z = 3x^3 + 3y^3 - 9xy + 10$  имеет две стационарные точки:  $(0; 0)$  и  $(1; 1)$ .

Найдём вторые частные производные и вычислим значения этих производных в стационарных точках.

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 18x; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = -9; \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 18y.$$

$$3.1. \quad A = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x^2} = 18 \cdot 0 = 0, \quad B = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial x \partial y} = -9, \quad C = \frac{\partial^2 z(0,0)}{\partial y^2} = 18 \cdot 0 = 0.$$

$\Delta = AC - B^2 = 0 \cdot 0 - (-9)^2 = -81 < 0$ , т.е. стационарная точка  $(0; 0)$  не является точкой экстремума.

$$3.2. \quad A = \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x^2} = 18 \cdot 1 = 18, \quad B = \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial x \partial y} = -9, \quad C = \frac{\partial^2 z(1,1)}{\partial y^2} = 18 \cdot 1 = 18.$$

$\Delta = AC - B^2 = 18 \cdot 18 - (-9)^2 = 324 - 81 = 273 > 0$ , значит, точка  $(1; 1)$  – точка экстремума, и т.к.  $A > 0$ , то это точка минимума.

Значение функции в этой точке  $z(1,1) = 3 \cdot 1^3 + 3 \cdot 1^3 - 9 \cdot 1 \cdot 1 + 10 = 7$ .