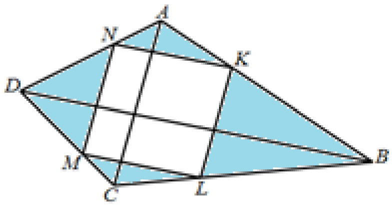
На сторонах четырехугольника *ABCD* взяты точки *K*, *L*, *M*, *N* так, что четырехугольник *KLMN* является ромбом, стороны которого параллельны диагоналям *AC* и *BD*. Найдите отношение площади *KLMN* к площади *ABCD* если *AC*:*BD*=1:2.



$AC = b,\ BD = 2b;\ KL = LM = MN = NK = kb.$

$\Delta MDN \sim \Delta CDA \Rightarrow \dfrac{DN}{DA} = \dfrac{MN}{AC} = \dfrac{kb}{b} = k \Leftrightarrow DN = k \cdot DA.$

$\Delta NAK \sim \Delta DAB \Rightarrow \dfrac{NA}{DA} = \dfrac{NK}{DB} = \dfrac{kb}{2b} = \dfrac{k}{2} \Leftrightarrow NA = \dfrac{k}{2} \cdot DA.$

$$DA = DN + NA = k \cdot DA + \frac{k}{2} \cdot DA \Rightarrow DA = \frac{3k}{2} \cdot DA \Rightarrow \frac{3k}{2} = 1 \Rightarrow k = \frac{2}{3} \Rightarrow KL = \frac{2}{3}b.$$

$$S_{KLMN} = KL^2 \cdot \sin(\angle NKL) = \frac{4}{9}b^2 \sin(\angle NKL);$$

$$S_{ABCD} = \frac{1}{2}BD \cdot AC \cdot \sin(BD, AC) = \frac{1}{2} \cdot 2b \cdot b \cdot \sin(BD, AC) = b^2 \cdot \sin(BD, AC).$$

$\dfrac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \dfrac{4\sin(\angle NKL)}{9\sin(BD, AC)}$. $\sin(\angle NKL) = \sin(BD, AC)$, т.к. $NK \parallel CD$ и $KL \parallel AC$.

$$\text{Поэтому } \frac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}} = \frac{4}{9}.$$

Отношение площадей $\dfrac{S_{KLMN}}{S_{ABCD}}$ можно найти и по-другому:

$$S_{KLMN} = S_{ABCD} - S_{\Delta AKN} - S\Delta_{CLM} - S\Delta_{DMN} - S_{\Delta BKL}.$$

Т.к. $BD = 2AC$, то $\dfrac{NK}{BD} = \dfrac{ML}{BD} = \dfrac{1}{3}$, а т.к. $\Delta AKN \sim \Delta ABD$, то $S_{\Delta AKN} = \dfrac{1}{9}S_{\Delta ABD}$. Аналогично, $S_{\Delta SLM} = \dfrac{1}{9}S_{\Delta BCD}$. $\dfrac{MN}{AC} = \dfrac{KL}{AC} = \dfrac{2}{3}$. $\Delta DMN \sim \Delta DCA$, а $\Delta BKL \sim \Delta BAC$, поэтому $S_{\Delta DMN} = \dfrac{4}{9}S_{\Delta DCA}$, $S_{\Delta BKL} = \dfrac{4}{9}S_{\Delta BAC}$. Таким образом,

$$S_{KLMN} = S_{ABCD} - \frac{1}{9}(S_{\Delta ABD} + S\Delta_{BCD}) - \frac{4}{9}(S\Delta_{DCA} + S_{\Delta BAC}).$$

Но $S_{\Delta ABD} + S\Delta_{BCD} = S\Delta_{DCA} + S_{\Delta BAC} = S_{ABCD}$. Поэтому

$$S_{KLMN} = S_{ABCD} - \frac{1}{9}S_{ABCD} - \frac{4}{9}S\Delta_{ABCD} = \frac{4}{9}S_{ABCD}.$$