

Хлопчик ходить до школи що знаходиться поряд зі станцією метро. Відомо що він бігає зі швидкістю 10 км/год. Щоб не запізнитись на урок і прийти точно о 9 годині ранку він кожного дня біжить ескалатором. Іноді він плутає ескалатор на підйом з ескалатором на спуск і тоді запізнюється на 12 хвилин. Одного раз ескалатор стояв і хлопчик запізнився на 3 хвилини. Яка швидкість ескалатора в метро?

Предварительные соображения.

Считаем, что мальчик задерживается только на эскалаторе. В случае, если он пробегает по ходу движения эскалатора он прибегает вовремя (минута в минуту). Введём обозначения:

t_1 – Время пробега по эскалатору по ходу его движения.

t_2 – Время пробега по эскалатору против его движения.

t_3 – Время пробега по неподвижному эскалатору.

S_e – Длина эскалатора.

v_e – Скорость эскалатора.

v_x – скорость мальчика.

Решение

При пробеге по ходу движения мальчик затрачивает время t_1 :

$$t_1 = \frac{S_e}{v_x + v_e} \quad (1)$$

При пробеге против движения эскалатора мальчик затрачивает время t_2 :

$$t_2 = \frac{S_e}{v_x - v_e} \quad (2)$$

При пробеге по неподвижному эскалатору мальчик затрачивает время t_3 :

$$t_3 = \frac{S_e}{v_x} \quad (3)$$

По условию известны разности времен:

$$\begin{aligned} t_2 - t_1 &= 12 \text{ [мин]} = \frac{1}{5} \text{ [ч]} \\ t_3 - t_1 &= 3 \text{ [мин]} = \frac{1}{20} \text{ [ч]} \end{aligned} \quad (4)$$

Тут лучше бы время и скорости привести к одному формату. Например выразить скорость в формате (что-то/мин). Или время выразить в часах. Так и поступим хотя в нашем решении это необязательно. Но это понадобится при проверке.

Из (2) вычитаем (1), и из уравнения (3) вычитаем (1). И учитываем (4).

$$t_2 - t_1 = \frac{1}{5} = \frac{S_e}{v_x - v_e} - \frac{S_e}{v_x + v_e} = S_e \left(\frac{1}{v_x - v_e} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) \quad (5)$$

$$t_3 - t_1 = \frac{1}{20} = \frac{S_e}{v_x} - \frac{S_e}{v_x + v_e} = S_e \left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) \quad (6)$$

Получили 2 уравнения (5), (6) и с двумя неизвестными S_e , v_e . Теперь решаем данную систему. Исключаем S_e . Для этого выражаем $1/S_e$ из (5) и (6) и приравниваем правые части полученных выражений.

$$5 \left(\frac{1}{v_x - v_e} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) = 20 \left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) \quad (7)$$

Теперь из (7) находим v_e .

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{v_x - v_e} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) &= 4 \left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) \\ \left(\frac{1}{v_x - v_e} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) - 4 \left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) &= 0 \\ \frac{v_x(v_x + v_e) - v_x(v_x - v_e) - 4(v_x + v_e)(v_x - v_e) + 4v_x(v_x - v_e)}{v_x(v_x - v_e)(v_x + v_e)} &= 0 \end{aligned}$$

Дробь равна нулю, если числитель равен нулю. По ходу упрощаем его. Приводим подобные слагаемые.

$$v_x^2 + v_x v_e - v_x^2 + v_x v_e - 4(v_x^2 - v_e^2) + 4v_x^2 - 4v_x v_e = 0$$

$$2v_x v_e + 4v_e^2 - 4v_x v_e = 0$$

$$4 v_e^2 - 2 v_x v_e = 0$$

$$v_e (2 v_e - v_x) = 0 \quad (8)$$

Из (8)

$$v_e = 0$$

или

$$2 v_e - v_x = 0$$

откуда

$$v_e = v_x / 2 = 10 / 2 = 5 \text{ [км/ч]}$$

Хорошо бы ещё проверить. Корень $v_e = 0$ явно лишний.

Проверяем с $v_e = 5$ [км/ч].

$$t_3 - t_1 = \frac{1}{20} = S_e \left(\frac{1}{v_x} - \frac{1}{v_x + v_e} \right) = \frac{v_e}{v_x (v_x + v_e)}$$

$$S_e = \frac{v_x (v_x + v_e)}{20 v_e} = \frac{10 * (10 + 5)}{20 * 5} = \frac{15}{10} = 1,5 \text{ [км]}$$

$$t_1 = \frac{S_e}{v_x + v_e} = \frac{1,5}{15} \text{ [ч]} = \frac{60 * 1,5}{15} = 6 \text{ [мин]}$$

$$t_2 = \frac{S_e}{v_x - v_e} = \frac{1,5}{5} \text{ [ч]} = \frac{60 * 1,5}{5} = 18 \text{ [мин]}$$

$$t_3 = \frac{S_e}{v_x} = \frac{1,5}{10} \text{ [ч]} = \frac{60 * 1,5}{10} = 9 \text{ [мин]}$$

Находим разности.

$$t_2 - t_1 = 18 - 6 = 12 \text{ ок.}$$

$$t_3 - t_1 = 9 - 6 = 3 \text{ ок.}$$

Как объяснить лишний корень, пока не знаю. Но $v_e = 5$ [км/ч] подходит.

ОТВЕТ: $v_e = 5$ [км/ч]