

**Доказать следующие утверждения. При любом натуральном  $n$  число  $n(n^2+5)$  делится на 6.**

**Решение.**

Возможно не самый быстрый способ, но у меня идея такая. Если мы докажем, что для любого  $n$ , начиная с 6 число  $X = n(n^2+5)$  делится на 6. А до 6 мы покажем это простой проверкой.

Итак  $n=1$

$$X = n(n^2+5) = 1 \cdot (1^2+5) = 6 \quad \text{ok}$$

$$X/6 = 1$$

Далее  $n=2$

$$X = n(n^2+5) = 2 \cdot (2^2+5) = 18 \quad \text{ok}$$

$$X/6 = 3$$

Далее  $n=3$

$$X = n(n^2+5) = 3 \cdot (3^2+5) = 3 \cdot 14 = 42 \quad \text{ok}$$

$$X/6 = 42/6 = 7$$

Далее  $n=4$

$$X = n(n^2+5) = 4 \cdot (4^2+5) = 4 \cdot 21 = 84 \quad \text{ok}$$

$$X/6 = 84/6 = 14$$

Наконец  $n=5$

$$X = n(n^2+5) = 5 \cdot (5^2+5) = 5 \cdot 30 = 150 \quad \text{ok}$$

$$X/6 = 150/6 = 25$$

А теперь, начиная с 6 все натуральные числа можно причислить к одной из 6-ти категорий

$$n = 6k$$

$$n = 6k+1$$

$$n = 6k+2 \quad \text{где } k \in \mathbb{N}$$

$$n = 6k+3$$

$$n = 6k+4$$

$$n = 6k+5$$

Например:

$$6=6 \cdot 1$$

$$7=6 \cdot 1 + 1$$

$$8=6 \cdot 1 + 2$$

...

$$11=6 \cdot 1 + 5$$

$$12=6 \cdot 2$$

$$13=6 \cdot 2 + 1$$

...

И т.д.

Если мы для каждой из этих категорий докажем заданное утверждение, то фактически мы докажем его справедливость для любого натурального числа.

Поехали.

$$1. \quad n = 6k$$

$$X = 6k((6k)^2 + 5)$$

Тут очевидно, что число  $X$  содержит множитель 6.

$$2. \quad n = 6k + 1$$

$$\begin{aligned} X &= (6k+1)((6k+1)^2 + 5) = (6k+1)(36k^2 + 12k + 1 + 5) = \\ &= (6k+1)(36k^2 + 12k + 6) = 6(6k+1)(6k^2 + 2k + 1) \end{aligned}$$

Очевидно, что число  $X$  содержит множитель 6. Значит оно делится на 6.

$$3. \quad n = 6k + 2$$

$$\begin{aligned} X &= (6k+2)((6k+2)^2 + 5) = (6k+2)(36k^2 + 24k + 4 + 5) = \\ &= 2(3k+1)(36k^2 + 24k + 9) = 6(3k+1)(12k^2 + 8k + 3) \end{aligned}$$

Доказано, что число  $X$  содержит множитель 6. Значит оно делится на 6.

$$4. \quad n = 6k + 3$$

$$\begin{aligned} X &= (6k+3)((6k+3)^2 + 5) = (6k+3)(36k^2 + 36k + 9 + 5) = \\ &= 3(2k+1)(36k^2 + 36k + 14) = 3(2k+1)2(18k^2 + 18k + 7) = \\ &= 6(2k+1)(18k^2 + 18k + 7) \end{aligned}$$

Доказано, что число  $X$  содержит множитель 6. Значит оно делится на 6.

$$5. \quad n = 6k + 4$$

$$\begin{aligned} X &= (6k+4)((6k+4)^2 + 5) = (6k+4)(36k^2 + 48k + 16 + 5) = \\ &= 2(3k+2)(36k^2 + 48k + 21) = 2(3k+2)3(12k^2 + 16k + 7) = \\ &= 6(3k+2)(12k^2 + 16k + 7) \end{aligned}$$

Доказано, что число  $X$  содержит множитель 6. Значит оно делится на 6.

$$6. \quad n = 6k + 5$$

$$\begin{aligned} X &= (6k+5)((6k+5)^2 + 5) = (6k+5)(36k^2 + 60k + 25 + 5) = \\ &= (6k+5)(36k^2 + 60k + 30) = 6(6k+5)(6k^2 + 10k + 5) \end{aligned}$$

Доказано, что число  $X$  содержит множитель 6. Значит оно делится на 6.

Таким образом мы доказали, что для любого натурального  $n$  число

$$X = n(n^2 + 5) \text{ делится на 6 нацело.}$$