

Решить в целых числах уравнения

а) $7x - 4y = 29$

б) $19x - 5y = 119$

в) $9x - 11y = 8$

г) $17x - 49y = -8$.

Пусть дано уравнение $ax + by = c$ (*), где $\{a, b, c\} \subset Z$ (Z – множество целых чисел) и $(a, b) = 1$, где (a, b) – наибольший общий делитель чисел a и b . Иными словами, a, b, c – целые числа, причем a и b – взаимно простые. И пусть (x_0, y_0) и (x_1, y_1) – два различных целочисленных решения этого уравнения, т.е.

$$\begin{cases} ax_0 + by_0 = c \\ ax_1 + by_1 = c \end{cases}. \text{ Вычитая из 1-го уравнения 2-е, получим: } a(x_0 - x_1) + b(y_0 - y_1) = 0$$

или $a(x_0 - x_1) = b(y_1 - y_0)$ (1). Т.к. $(a, b) = 1$, то a – делитель $y_1 - y_0$, а b – делитель $x_0 - x_1$, т.е. $y_1 - y_0 = ak_1$, $x_0 - x_1 = bk_2$. Заменяя в (1) $y_1 - y_0$ на ak_1 , а $x_0 - x_1$ на bk_2 , получим: $abk_1 = bak_2$. Отсюда $k_1 = k_2 = k$. И окончательно:

$$\begin{cases} y_1 - y_0 = ak \\ x_0 - x_1 = bk \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = y_0 + ak \\ x_1 = x_0 - bk \end{cases} \quad (3).$$

Обратно, легко проверить, что если x_0, y_0 – решение уравнения (*), то все пары чисел (3), (4) при любом $k \in Z$ дают решение уравнения (*):

$$ax_1 + by_1 = a(x_0 - bk) + b(y_0 + ak) = ax_0 - abk + by_0 + abk = ax_0 + by_0 = c.$$

Поэтому в уравнениях а) – г) будем сначала находить одно решение, а затем пользоваться формулами (3), (4).

а) $7x - 4y = 29$; $4y = 7x - 29$; $4y = 8x - 28 - x - 1$; $y = 2x - 7 - \frac{x+1}{4}$.

$$x_0 = 3, y_0 = 2 \cdot 3 - 7 - \frac{3+1}{4} = -2. \text{ Т.к. } a = 7, b = -4, \text{ то } \begin{cases} x = 3 + 4k \\ y = -2 + 7k \end{cases}.$$

(Здесь можно было взять $x_0 = -1$ и $y_0 = -9$).

б) $19x - 5y = 119$; $5y = 19x - 119$; $5y = 20x - 120 - x + 1$; $y = 4x - 24 - \frac{x-1}{5}$.

$$x_0 = 1, y_0 = 4 \cdot 1 - 24 - \frac{-1+1}{5} = -20. \text{ Т.к. } a = 19, b = -5, \text{ то } \begin{cases} x = 1 + 5k \\ y = -20 + 19k \end{cases}.$$

в) $9x - 11y = 8$; $9x = 11y + 8$; $9x = 9y + 9 + 2y - 1$; $x = y + 1 + \frac{2y-1}{9}$.

$$y_0 = 5, x_0 = 5 + 1 + \frac{2 \cdot 5 - 1}{9} = 7. \text{ Т.к. } a = 9, b = -11, \text{ то } \begin{cases} x = 7 + 11k \\ y = 5 + 9k \end{cases}.$$

г) $17x - 49y = -8$; $17x = 49y - 8$; $17x = 51y - 2y - 8$; $x = 3y - \frac{2y+8}{17}$;

$$y_0 = -4, x_0 = -4 \cdot 3 - \frac{-4 \cdot 2 + 8}{17} = -12. \text{ Т.к. } a = 17, b = -49, \text{ то } \begin{cases} x = -12 + 49k \\ y = -4 + 17k \end{cases}.$$