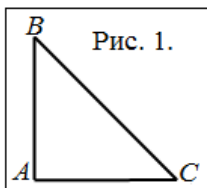


Известно, что в треугольнике ABC угол $A=2$ угла C , сторона BC на 2 см больше стороны AB , а $AC=5$ см. Найти AB и BC .



Легко видеть, что случай $\angle C = 90^\circ$ не возможен, т.к. в этом случае $\angle C = 45^\circ$, но тогда и $\angle B = 45^\circ$, и ABC – равнобедренный равносторонний треугольник, у которого по теореме Пифагора

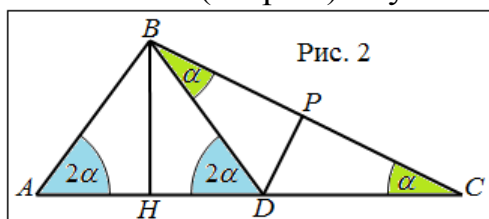
$$AB = AC = 5 \text{ см}, BC = \sqrt{AB^2 + AC^2} = \sqrt{5^2 + 5^2} = 5\sqrt{2} \text{ см}.$$

По условию $BC - AB = 2$ см, а у нас получается

$$BC - AB = 5\sqrt{2} - 5 \text{ см}.$$

Дальше обозначения единиц измерений для отрезков не пишем, подразумевая, что это сантиметры (см).

1. $\angle A < 90^\circ$ (острый). Пусть $\angle C = \alpha$. По условию $\angle A = 2\alpha$, $2\alpha < 90^\circ$, $\alpha < 45^\circ$, $\angle A + \angle C = 2\alpha + \alpha = 3\alpha < 135^\circ \Rightarrow -3\alpha > -135^\circ$.



$\angle B = 180^\circ - (\angle A + \angle C) = 180^\circ - 3\alpha > 180^\circ - 135^\circ$, $\angle B > 45^\circ > \angle C$. Т.к. $\angle B > \angle C$, то из точки B можно провести луч, находящийся между сторонами AB и BC и пересекающий сторону AC в некоторой точке D , так, что $\angle CBD = \angle C = \alpha$. Т.к.

$\angle CBD = \angle C$, то $\triangle BDC$ – равнобедренный, и $BD = DC$. Далее, $\angle BDA$ – внешний угол треугольника BDC , поэтому $\angle BDA = \angle C + \angle CBD = 2\alpha = \angle A$, $\triangle ABD$ – равнобедренный и $AB = BD$.

Таким образом, $AB = BD = DC = x$. Тогда $BC = x + 2$, $AD = AC - DC = 5 - x$. BH – высота и медиана равнобедренного треугольника ABD , поэтому

$$AH = HD = \frac{AD}{2} = \frac{5-x}{2}, HC = HD + DC = \frac{5-x}{2} + x = \frac{5+x}{2}.$$

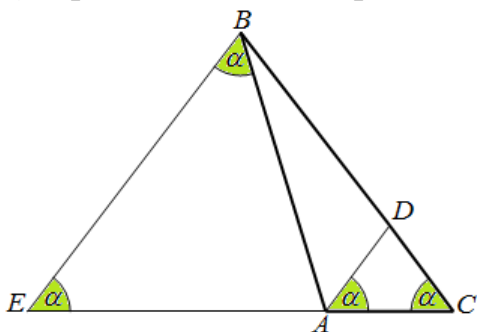
DP – высота и медиана равнобедренного треугольника BDC , $BP = PC = \frac{x+2}{2}$.

У прямоугольных треугольников BCH и CDP общий острый угол C , поэтому они подобны, и $PC : DC = HC : BC$ или $\frac{x+2}{2} : x = \frac{x+5}{2} : (x+2) \Leftrightarrow \frac{x+2}{x} = \frac{x+5}{x+2}$.

Отсюда $(x+2)^2 = x^2 + 5x$; $x^2 + 4x + 4 = x^2 + 5x$; $x^2 + 5x = x^2 + 4x + 4$; $x = 4$.

Значит, $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

2) Предположим теперь, что угол A – тупой. По-прежнему $\angle C = \alpha$, $\angle A = 2\alpha$, $AB = x$ см, $BC = x + 2$ см. AD – биссектриса угла A , и $\angle CAD = \frac{1}{2}\angle A = \alpha$. Через точку B проведем прямую, параллельную AD до пересечения в точке E с продолжением стороны AC за точку A .



$\angle BEC = \angle DAC$ как соответственные при параллельных BE и DA и секущей EC , и т.к.

$\angle C = \alpha = \angle E$, то $\triangle CBE$ – равнобедренный, и $BE = BC = x + 2$.
 $\angle BAC = \angle BEA + \angle ABE = 2\alpha$ как внешний угол треугольника ABE . Отсюда
 $\angle ABE = \angle BEA = \alpha$, $\triangle BAE$ – равнобедренный, и $AE = AB = x$. Углы при основании равнобедренных треугольников CBE и ABE равны, значит, эти треугольники подобны, и $\frac{AB}{BE} = \frac{BE}{EC}$. Т.к. $EC = EA + AC = x + 5$, $AB = x$, $BE = x + 2$, то

$$\frac{x}{x+2} = \frac{x+2}{x+5} \Leftrightarrow x^2 + 5x = x^2 + 4x + 4 \Leftrightarrow x = 4. \text{ Получили тот же самый результат.}$$

Ответ: $AB = 4$ см, $BC = 6$ см.

P.S. Т.к. $AC^2 + AB^2 = 5^2 + 4^2 = 41 \text{ см}^2$, а $BC^2 = 6^2 = 36$, т.е. $AC^2 + AB^2 > BC^2$, то на самом деле угол A – острый!