

Итак, есть неравенство $25 - x^2 \geq 0$

Первым делом в решении, представленном на рисунке, квадрат нашего икса и число разносятся в разные части. Хотя вообще это не совсем правильно.

Правильно делать так: Пусть у нас есть неравенство $f(x) \vee 0$,

где $\vee$ - некоторый знак неравенства: $\geq, \leq, >, <$

Что надо делать? Нужно найти так называемые нули функции. Что это такое? Это такие значения x , ($x_1, x_2, x_3, x_4, \dots$) такие, что

$f(x_1) = 0, f(x_2) = 0, f(x_3) = 0, f(x_4) = 0, \dots$, то есть при подстановке

таких чисел в функцию $f(x)$ её значение становится равным нулю. Так

вот, ищутся такие значения. Они могут быть (одно, два, три, $\dots$), также

их может вообще не быть. Всё зависит от конкретного случая. После

того, как нули функции найдены, они расставляются на числовой оси

по порядку слева направо (от меньших к большиим). Затем нужно про-

анализировать знаки на промежутках между этими самими нулями.

Самый банальный способ - взять какое-нибудь ЛЮБОЕ число из про-

межутка и подставить в функцию. Если она больше нуля, то на проме-

жутке поставить '+', меньше нуля - поставить '-'.

А затем, исходя из исходного неравенства, взять в ответ нужный промежуток (или несколь-

ко). Ещё необходимо учитывать, какое неравенство: строгое ($>, <$) или

нестрогое ($\leq, \geq$). Если неравенство строгое, то нули функции на число-

вой оси надо сделать "выколотыми" (пустыми внутри), если нестрогое

- то закрасить их внутри. Закрашенные точки берутся так же в ответ

и соответствующие промежутки берутся с квадратными скобками (на-

пример, $[-9; -8]$), выколотые точки в ответ не берутся и соответству-

ющие промежутки берутся с круглыми скобками (например, $(5; 18)$).

Также иногда бывают случаи, когда точка не принадлежит ни одному

промежутку, с которыми она граничит, а ещё есть другие промежутки

и при объединении надо записывать это так (например, $(-7; -5) \cup \{2\}$,

здесь такое число - это "2"). Ещё возможны случаи, когда на числовой

оси будут как выколотые точки, так и закрашенные. Например, если

неравенство нестрогое, но функция - это дробь, соответственно в ней

есть числитель и знаменатель, нули которых ищутся независимо друг

от друга. Но если в числителе нуль допустим (дробь вида $0/5$ это 0 про-

сто) и точки будут закрашенными, то для знаменателя нули - те числа,

которые обращают знаменатель в нуль (дробь вида $7/0$), а на нуль делить нельзя, поэтому такие точки будут выколотыми.

Теперь про преобразования в неравенствах:

1. К неравенству с обеих сторон можно добавлять или вычитать любое число без изменения знака неравенства.
2. Переносить какое-то слагаемое (переменная это или нет, неважно) нужно с противоположным знаком (как в уравнении).
3. При умножении или делении на какое-то число нужно знать его знак: если это число положительное, то знак неравенства не меняется, если число отрицательное, знак неравенства меняется на противоположный (пример: $-x + 5 > 0$; $|\cdot(-1) \Rightarrow x - 5 < 0$).

Кстати, это работает и для выражений с переменными, но если нет уверенности в решении неравенств, то лучше так не делать.

Теперь можно к самому неравенству вернуться.

Вспомним формулу разности квадратов:

$a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, применим её:

$25 - x^2 = (5 - x)(5 + x)$, то есть получаем неравенство:

$(5 - x)(5 + x) \geq 0$, у нас неравенство вида $f(x) \geq 0$, то есть нужно найти нули функции. Для этого нужно решить уравнение $f(x) = 0$. Это очень просто делается: наша функция представляет собой произведение сомножителей. Объединение значений, при которых каждый из сомножителей дает 0, и есть все нули. Это совокупность решений, записывается так:

$$(5 - x)(5 + x) = 0 \Rightarrow \begin{cases} 5 - x = 0 \\ 5 + x = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 5 \\ x = -5 \end{cases}$$

Нули нашли, теперь снова запишем неравенство:

$(5 - x)(5 + x) \geq 0$, для удобства умножим неравенство на (-1)

$$(5 - x)(5 + x) \geq 0 \Big| \cdot (-1) \Rightarrow (-1)(5 - x)(5 + x) \leq 0; \Rightarrow (x - 5)(5 + x) \leq 0$$

Знак поменяли, потому что на (-1) умножали. Ну и напоследок переставим местами слагаемые во второй скобке

$$(x - 5)(x + 5) \leq 0;$$

Теперь отмечаем наши нули на числовой оси: -5 и 5 .

Вот у нас получилось три промежутка:

1. $(-\infty; -5)$; 2. $(-5; 5)$; 3. $(5; +\infty)$, значения нулей я пока не беру, они войдут в ответ, потому что неравенство нестрогое, самое главное - разо-

браться со знаками в промежутках. Нужно взять любое значение из промежутка и подставить его в неравенство (можно в исходное, можно в полученное нами, так как это абсолютно равносильные неравенства).

Допустим, для первого промежутка возьмем -10.

Подставим его:

$$(x - 5)(x + 5) \leq 0$$

$$(-10 - 5)(-10 + 5) = (-15) \cdot (-5) = 75 > 0 (+)$$

Для второго промежутка удобно подставить ноль:

$$(0 - 5)(0 + 5) = (-5) \cdot 5 = -25 < 0 (-)$$

Для третьего промежутка возьмем для разнообразия 33:

$$(33 - 5)(33 + 5) = 28 \cdot 38 > 0 (+)$$

Вообще значение выражения необязательно считать, главное - определить его знак. То есть для $(-\infty; -5)$ мы получили "+ для $(-5; 5)$ получили "-", для $(5; +\infty)$ получили "+". Смотрим на то неравенство, в которое подставляли. $(x - 5)(x + 5) \leq 0$, раз присутствует знак $<$, то надо брать с '-' промежутки (если $>$ или $\geq$, то с "+"). Получается, для нас подходит промежуток $(-5; 5)$, но не забываем, что неравенство нестрогое, ограничений на -5 и 5 никаких нет, поэтому они тоже войдут в ответ и промежуток будет $[-5; 5]$

То есть $x \in [-5; 5]$

Ответ: $[-5; 5]$

P.S. а это уже на будущее. Если правильно раскладывать функции, то можно вообще не просчитывать знаки. Такой лайфхак в методе. Что нужно сделать:

1. Найти все нули функции и её разложить по нулям (либо в процессе преобразования выражения получится что-то подобное)

Разложение в худшем случае должно выглядеть примерно так:

$$(x + 9)^3(2x - 6)(x - 4)^2(8 - 4x) \leq 0$$

2. Преобразовать полученное выражение таким образом, чтобы при КАЖДОМ иксе в скобках коэффициент был равен 1 (и даже не -1), а только единице, для этого есть умножение на (-1) и умножение/деление на число, отличное от нуля.

Тогда постепенно будем получать

$$(x+9)^3 \cdot 2(x-3)(x-4)^2(8-4x) \leq 0;$$

$$(x+9)^3(x-3)(x-4)^2(8-4x) \leq 0;$$

$$(x+9)^3(x-3)(x-4)^2 \cdot 4(2-x) \leq 0;$$

$$(x+9)^3(x-3)(x-4)^2(2-x) \leq 0;$$

$$(x+9)^3(x-3)(x-4)^2(x-2) \geq 0$$

Вот получили то, что нам надо. А теперь правило:

В самом крайнем правом промежутке (который с $+\infty$) будет '+', а дальше знаки будут чередоваться, кроме случая, когда есть нуль четной кратности - это значит, что скобка с этим нулем имеет четную степень, например, 2, 4, 6, ..., 12, ..., 114, ... и т.д. Если же степень нечетная (1, 3, 5, 7, ...), то все в порядке и не думаем об этом.

У нас в примере нуль четной кратности это $x = 4$, (скобка $(x-4)^2$).

При переходе через этот нуль знак не поменяется.

Решим вообще это неравенство. Нули это $x = -9, x = 2, x = 3, x = 4$.

Расставим их на числовой оси (думаю, это будет сделать легко самостоятельно).

Соответственно, имеем промежутки

$(-\infty; -9); (-9; 2); (2; 3); (3; 4); (4; +\infty)$ (неравенство нестрогое, поэтому все нули в ответ пойдут, но мы снова просто сами промежутки смотрим).

Итак, начнем с самого правого, там "+" будет без всяких сомнений. Далее, переходим через нуль 4. Он как раз четной кратности, а значит, что следующий промежуток $(3; 4)$ будет с тем же знаком "+". Далее, переходим через нуль 3. Он обычный, поэтому знак на промежутке $(2; 3)$ будет другим и это '-'. Далее, переходим через нуль 2. Он обычный, поэтому знак снова поменяется и у промежутка $(-9; 2)$ знак будет "+". И теперь переходим через нуль 9. Он имеет степень 3, но она нечетная, так что знак снова поменяется. Значит, у промежутка $(-\infty; -9)$ знак будет '-'.

Имеем - + - + +

По последнему полученному неравенству нам надо $\geq$, то есть "+".

И учитываем сами нули, которые войдут в ответ. Получается, что это $x \in [-9; 2] \cup [3; 4] \cup [4; +\infty)$

Здесь сразу замечу, что подобная ситуация $[3; 4] \cup [4; +\infty)$ встречается

частенько и это надо обязательно знать, что это эквивалентно $[3; +\infty)$

То есть итогово $x \in [-9; 2] \cup [3; +\infty)$

Кстати, если бы неравенство было строгое, то $x \in (-9; 2) \cup (3; 4) \cup (4; +\infty)$ и тут уже никак не преобразовать.

А если бы у неравенства после преобразований получился знак $(\leq)$, то тогда бы нам пришлось брать все промежутки с '-' и нули (при нашем нестрогом неравенстве), и это было бы

$x \in (-\infty; -9] \cup [2; 3] \cup \{4\}$.

Вот как-то так. К этому способу советую относиться серьезно, ведь он экономит очень много времени порой и позволяет не допускать глупые ошибки. Надеюсь, моё объяснение более-менее понятно.