6.Tēma. Atvasinājums.

1.-2.STUNDAS

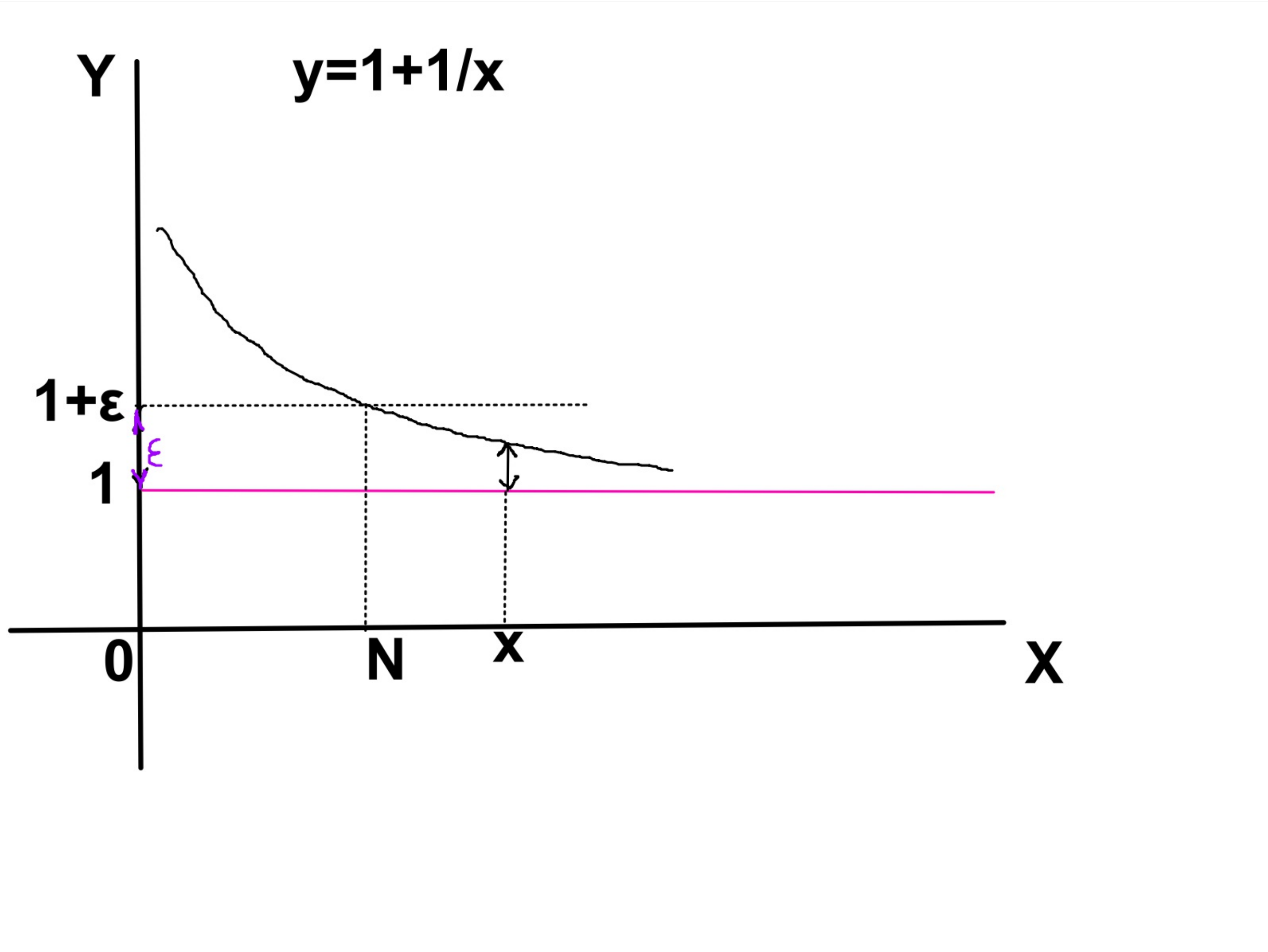
TEMA: **Funkcijas robeža**

SASNIEDZAMAIS REZULTĀTS:

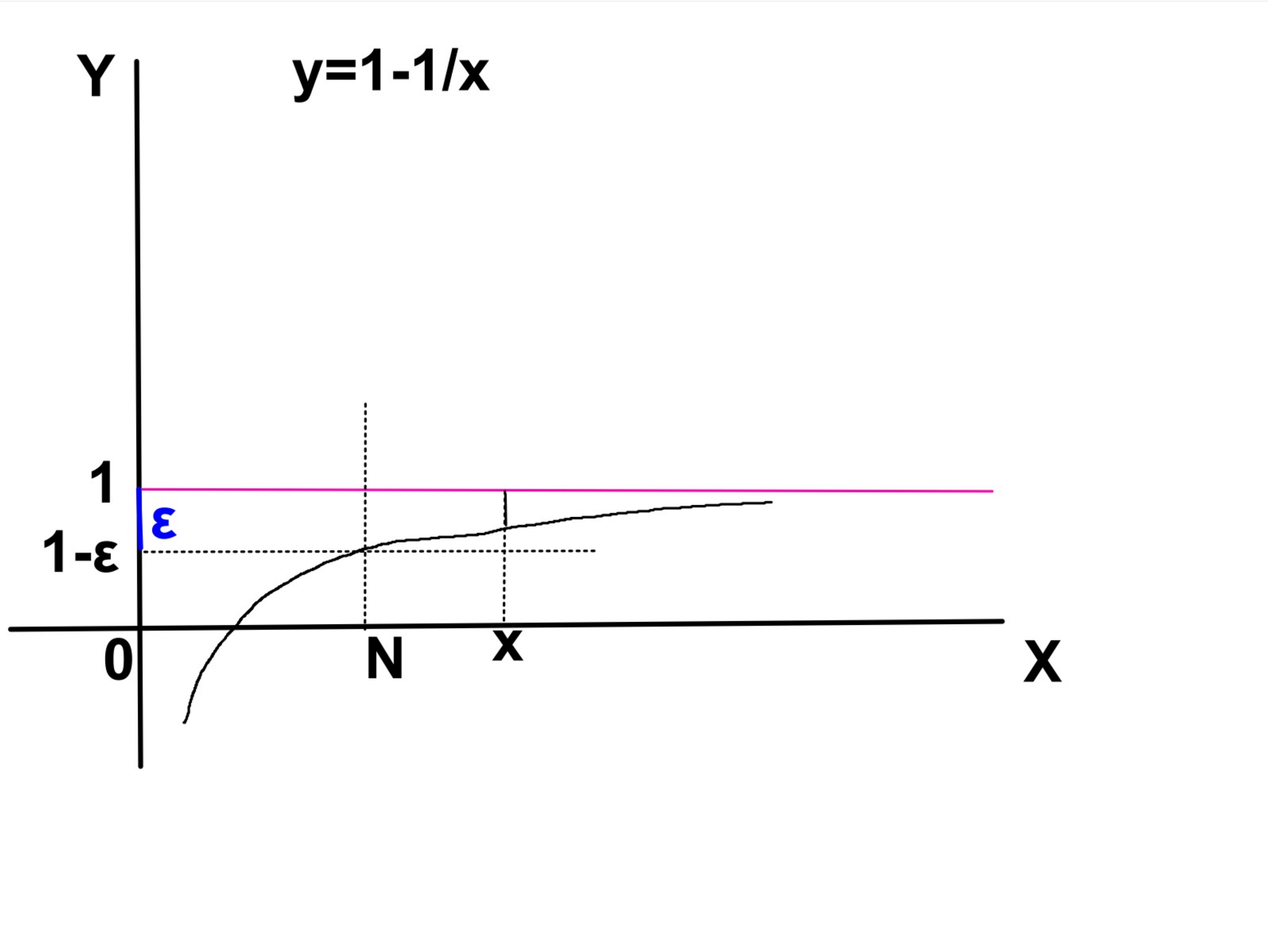
Zina funkcijas robežas definīciju.
Prot paskaidrot robežas definīciju, izmantojot konkrētu funkciju, tas īpašības un grafika novietojumu koordinātu plaknē.

Aplūkosim funkciju $f(x) = 1 + 1/x$.
Argumenta vērtībām neierobežoti palielinoties $x \to +\infty$, funkcijas vērtība arvien mazāk atšķiras no 1.

Skaitli A sauc par funkcijas robežu, kad $x \to +\infty$, un raksta $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = A$, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu skaitli N, ka ar visām x vērtībām, kas lielākas nekā N, ir spēkā nevienādība $| f(x) - A | < \varepsilon$



Y
y=1+1/x
1+ε
ε
1
0
N
x
X



Y
y=1-1/x
1
ε
1-ε
0
N
x
X

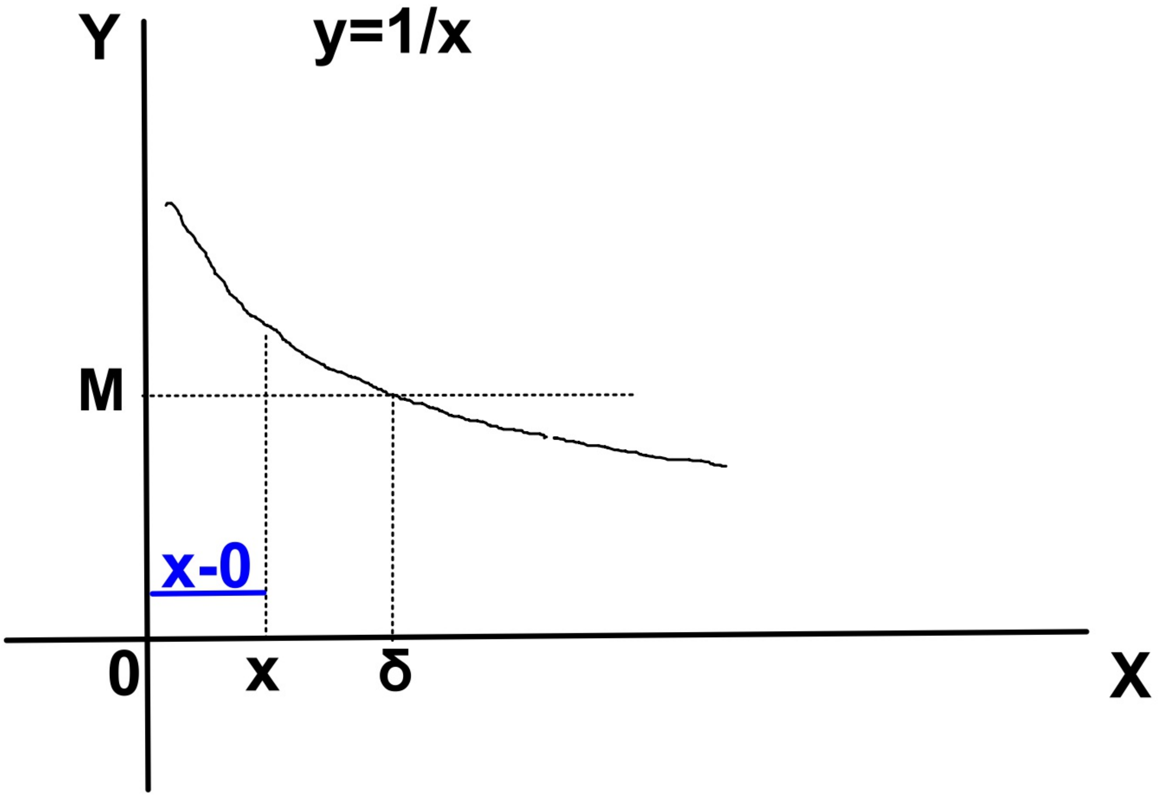
Funkcija $f(x) = \dfrac{1}{x} \rightarrow +\infty$, ja $x \rightarrow 0$

Saka, ka funkcija ir bezgalīgi liela, vai funkcijas robeža ir bezgalība.

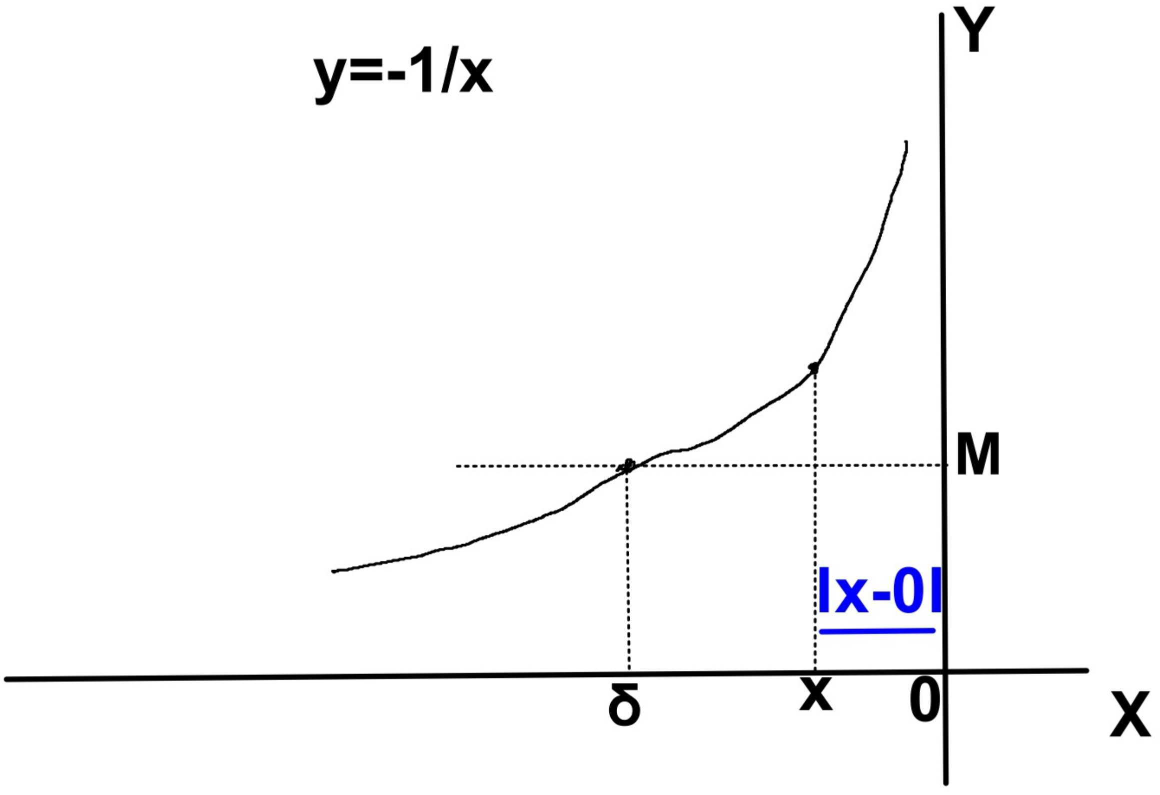
$$\lim_{x \to 0} f(x) = \infty$$

Funkcijas robeža ir bezgalība, kad $x \rightarrow a$, ja katram pozitīvam skaitlim M var atrast tādu pozitīvu skaitli δ, ka ar visām tām vērtībām, kurām $0 < |x-a| < \delta$, ir spēkā nevienādība $|f(x)| > M$

Analogi definē funkcijas robežu minuss bezgalību.



Y
y=1/x
M
x-0
0
x
δ
X

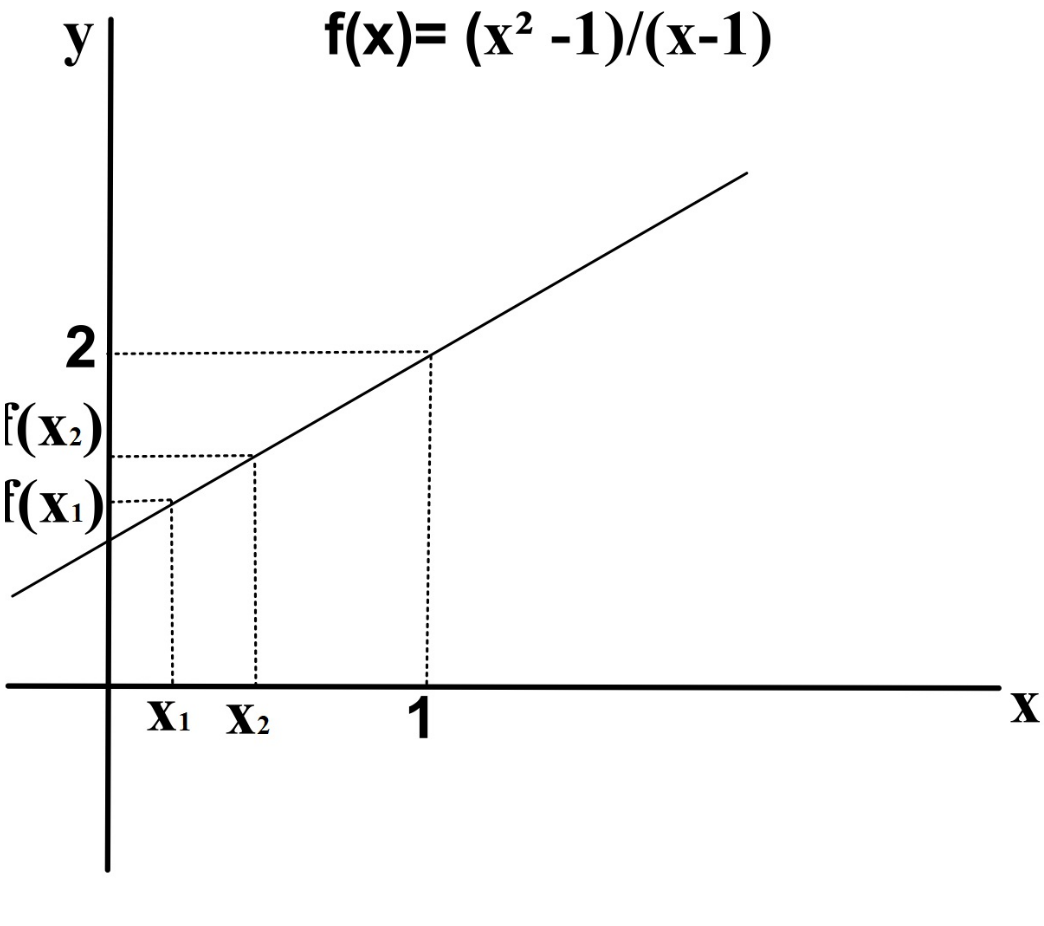

y=-1/x
Y
M
Ix-0I
δ
x
0
X

Pieņemsim , ka f(x) ir funkcija un a ir punkts, kura jebkurā apkārtnē atrodas bezgalīgi daudz funkcijas f(x)definīcijas apgabala punktu , turklāt pats skaitlis a var piederēt pie f(x) definīcijas apgabala, bet var arī pie tā nepiederēt. Tad dažādos veidos var sastādīt argumenta vērtību virknes , kuras konverģē uz skaitli a , bet kuru locekļi nav vienādi ar a. Izraudzīsimies vienu no šādām virknēm (x1,x2,x3,...xn,...). Atrodot funkcijas vērtības šajos punktos , iegūstam funkcijas vērtību virkni f(x1), f(x2),...f(xn)... . Pieņemsim , ka šī funkcijas vērtību virkne konverģē uz skaitli A.

Heinriha Heine definīcija.

Ja katrai argumenta vērtību virknei , kura konverģē uz skaitli a (bet kuras locekļi nav vienādi ar a), atbilstošā funkcijas vērtību virkne konverģē uz skaitli A, tad saka ka A ir šīs funkcijas robeža, kad x→a un raksta

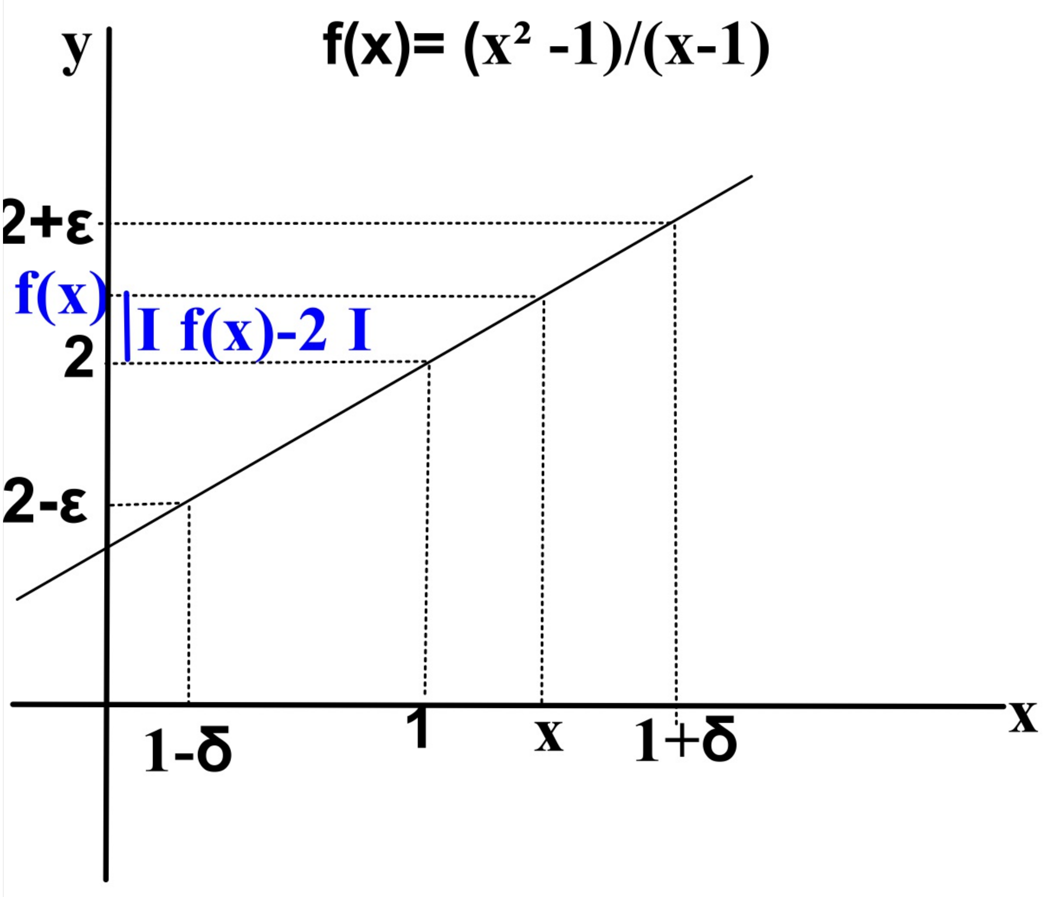
$$\lim_{x \to a} f(x) = A$$


y
f(x)= (x² -1)/(x-1)
2
f(x2)
f(x1)
x1
x2
1
x

Košī definīcija

Skaitli A sauc par funkcijas f(x) robežu, kad $x \to a$, ja katram pozitīvam skaitlim ε var atrast tādu δ, ka ar visām tām x vērtībām , kurām $0<| x-a | < \delta$, ir spēkā nevienādība

$$| f(x)-A | < \varepsilon$$



f(x)= (x² -1)/(x-1)
y
2+ε
f(x)
I f(x)-2 I
2
2-ε
1-δ
1
x
1+δ
x

Pierādīsim , izmantojot funkcijas robežas definīciju , ka funkcijas $f(x)=(x^2 -1)/(x-1)$ robeža ir 2.

Jāpierāda, ka $| f(x) -2 | < \varepsilon$, kur ε ir jebkurš pozitīvs skaitlis.

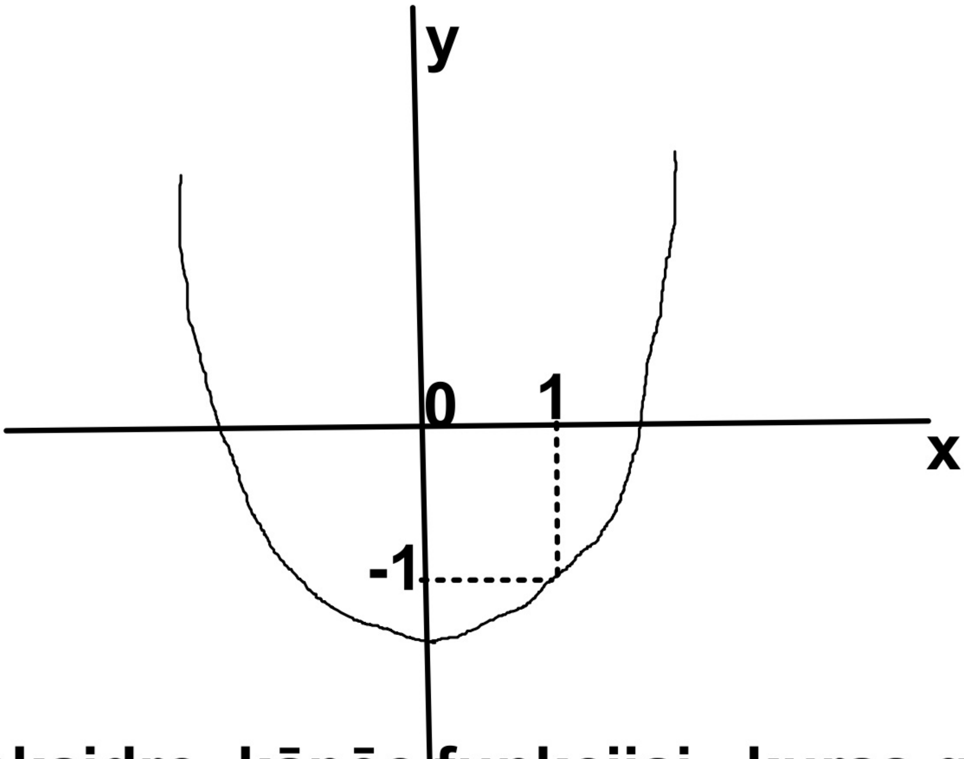
$$| (x^2 -1)/(x-1) -2 | < \varepsilon$$

$$| x+1 -2 | < \varepsilon$$

$| x-1 | < \varepsilon$ ir patiesa ja $x \to 1$

=> 2 ir f(x) robeža , ja $x \to 1$

Nosaki un pamato funkcijas $y=2+ 4/(x-3)$ robežas. Pieraksti rezultātu, izmantojot pieņemtos apzīmējumus.



Paskaidro, kāpēc funkcijai , kuras grafiks attēlots dotajā zīmējumā , robeža punktā 1 ir -1 .

Pierādīt, ka $\lim_{x \to 1} (4x+3) = 7$

Pierādīt, ka $\lim_{x \to -1} (3-2x) = 5$

Pierādīt, ka $\lim\limits_{x \to 0} (x^2/x) = 0$

$|f(x) - 0| < \varepsilon$

$\left|\frac{x^2}{x}\right| < \varepsilon$

$|x| < \varepsilon$ — patiess $\forall\, \varepsilon > 0$ un ja $x \to 0$

Pierādīt, ka $\lim\limits_{x \to 4} \left(\frac{16-x^2}{4-x}\right) = 8$

$$|f(x) - 8| < \varepsilon \qquad |4 + x - 8| < \varepsilon$$

$$\left|\frac{(16 - x^2)}{(4 - x)} - 8\right| < \varepsilon \quad |x - 4| < \varepsilon \text{ - patiess } \forall \varepsilon > 0$$

$$\left|\frac{(4-x)(4+x)}{4-x} - 8\right| < \varepsilon \quad \text{ja } x \to 4$$

$\Rightarrow$ robeža ir 8

Pierādīt, ka $\lim\limits_{x \to 2} ((x^2-4x+4)/(x-2)) = 0$

Pierādīt, ka $\lim\limits_{x \to 1/3} \left(\left(9x^2-6x+1\right)/\left(1-3x\right)\right) = 0$

3.-4.STUNDAS

TEMA: **Funkcijas robeža**

SASNIEDZAMAIS REZULTĀTS:

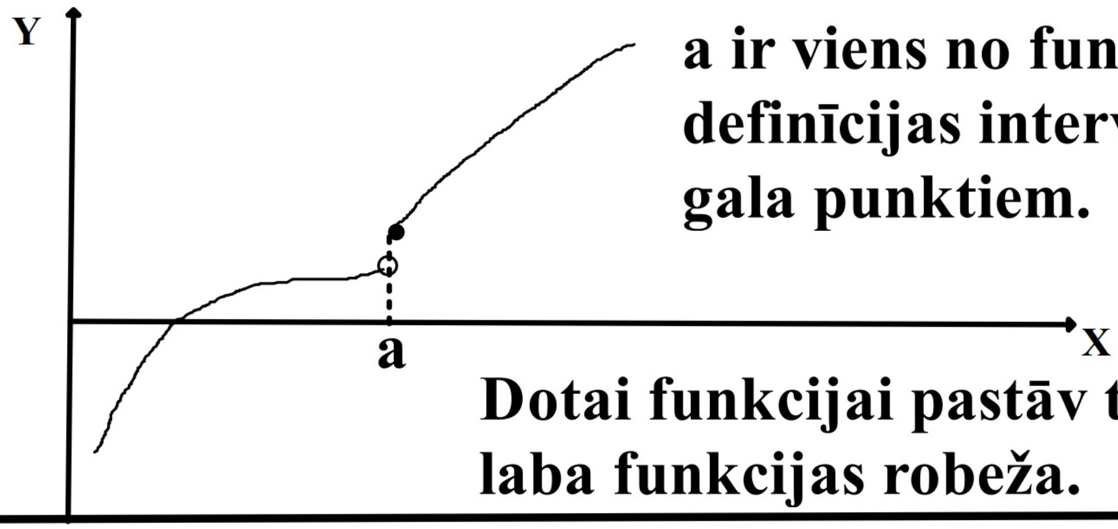
Zina kas ir vienpusējās funkcijas robežas.
Prot paskaidrot vienpusējās robežu, izmantojot definīciju, konkrētas funkcijas īpašības un tās grafiku.

Funkcijas robežu , kas x→a un x>a , sauc par robežu no labās puses vai par labo robežu un raksta

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x > a}} f(x) \quad \text{jeb} \quad \lim_{x \to a+0} f(x)$$

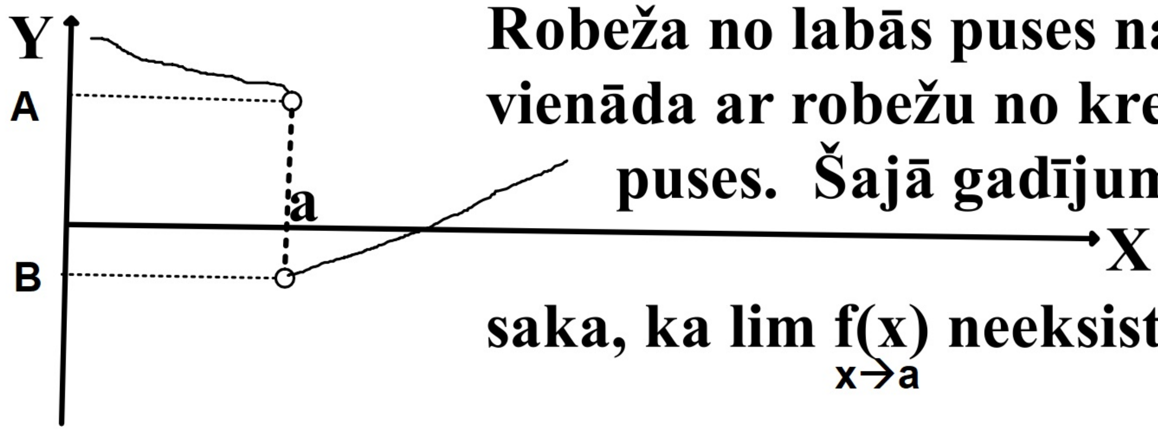
Funkcijas robežu , kas →a un x<a , sauc pa robežu no labās puses vai par kreiso robežu u rakst

$$\lim_{\substack{x \to a \\ x < a}} f(x) \quad \text{jeb} \quad \lim_{x \to a-0} f(x)$$



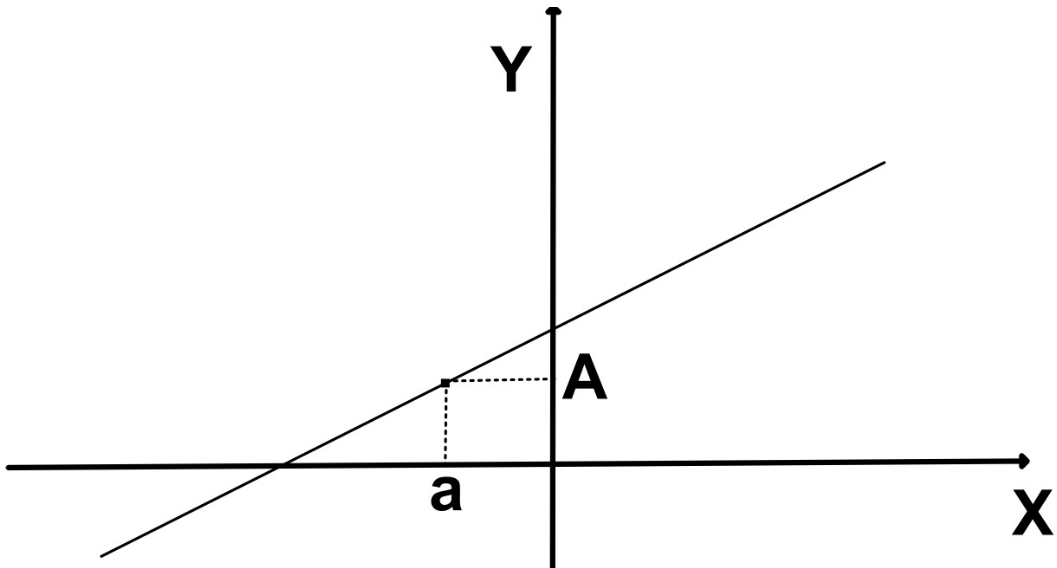
a ir viens no funkcijas definīcijas intervāla gala punktiem.

Dotai funkcijai pastāv tikai laba funkcijas robeža.



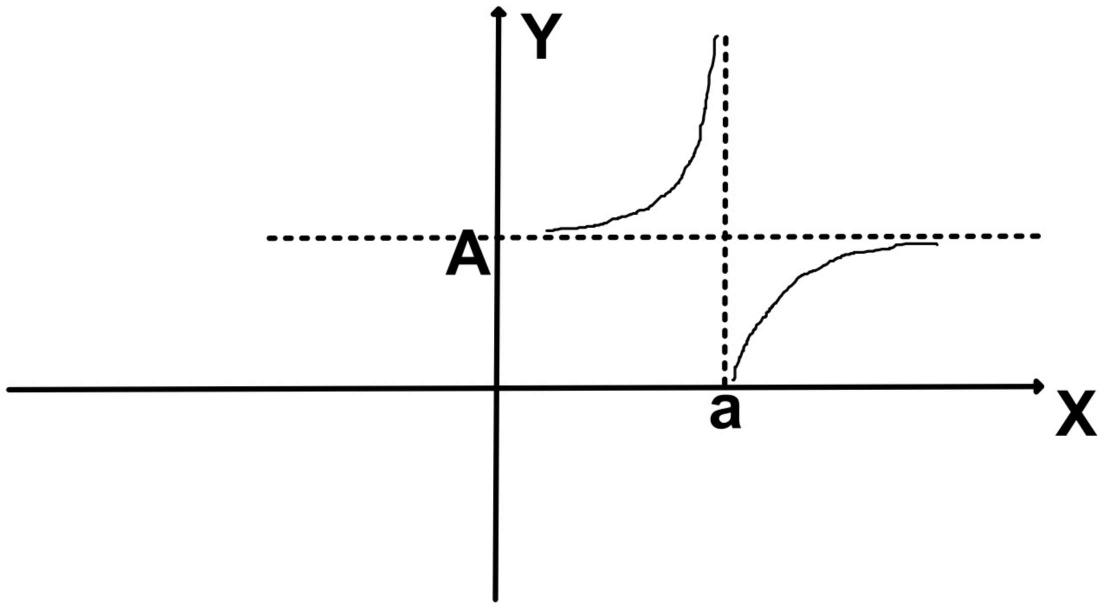
Robeža no labās puses nav vienāda ar robežu no kreisās puses. Šajā gadījumā

saka, ka $\lim_{x \to a} f(x)$ neeksistē



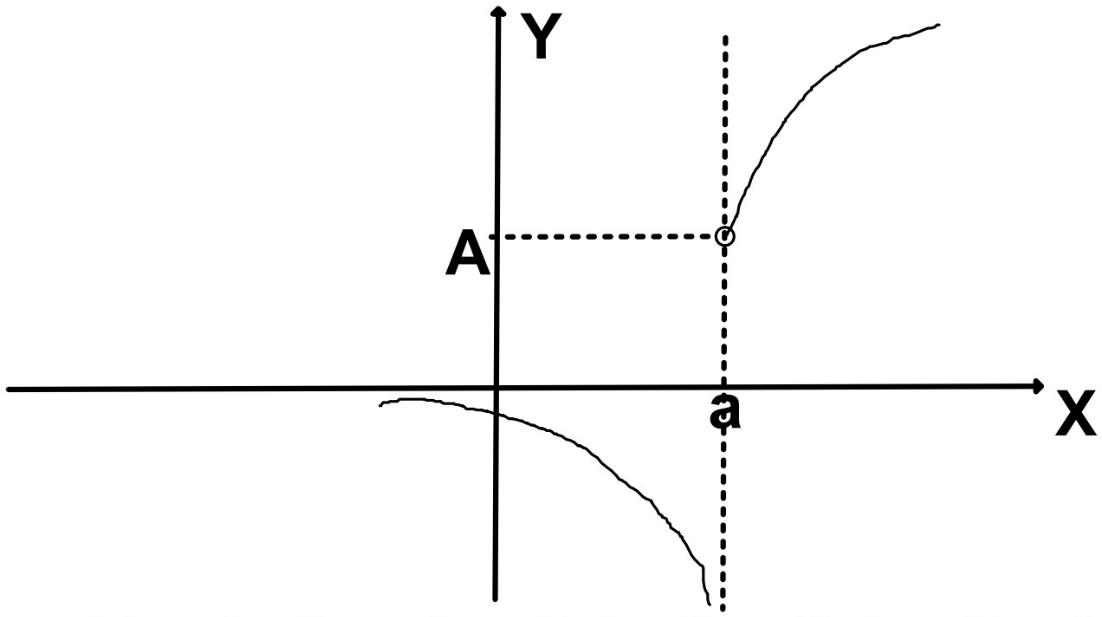
a ir intervāla iekšējais punkts un

$$\lim_{x \to a-0} f(x) = \lim_{x \to a+0} f(x) = \lim_{x \to a} f(x) = A$$



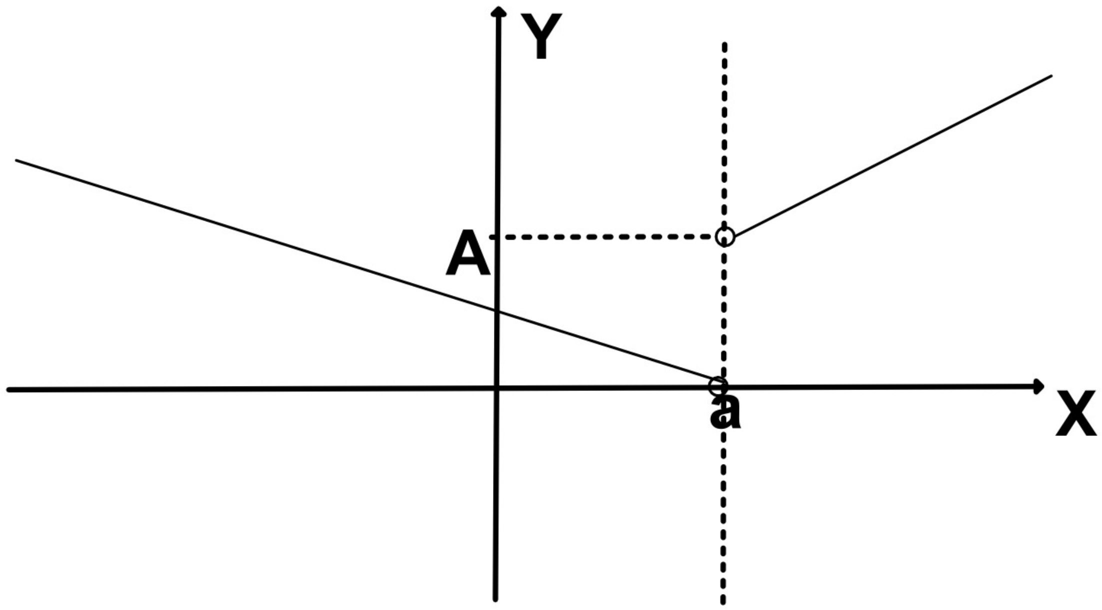
Nosaki robežas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$



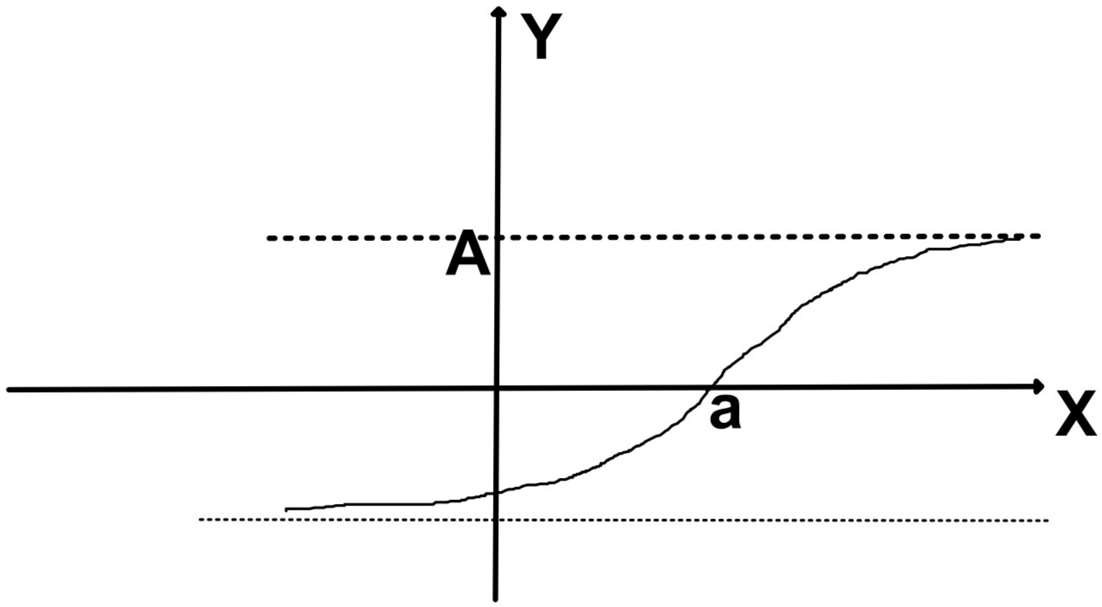
Nosaki robežas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$



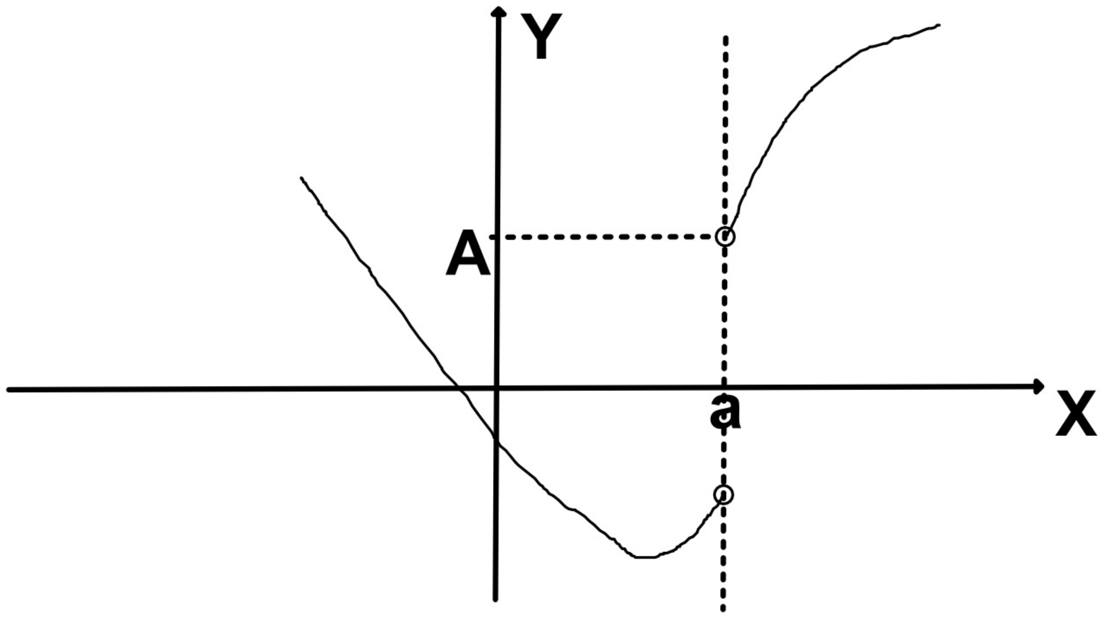
Nosaki robežas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$



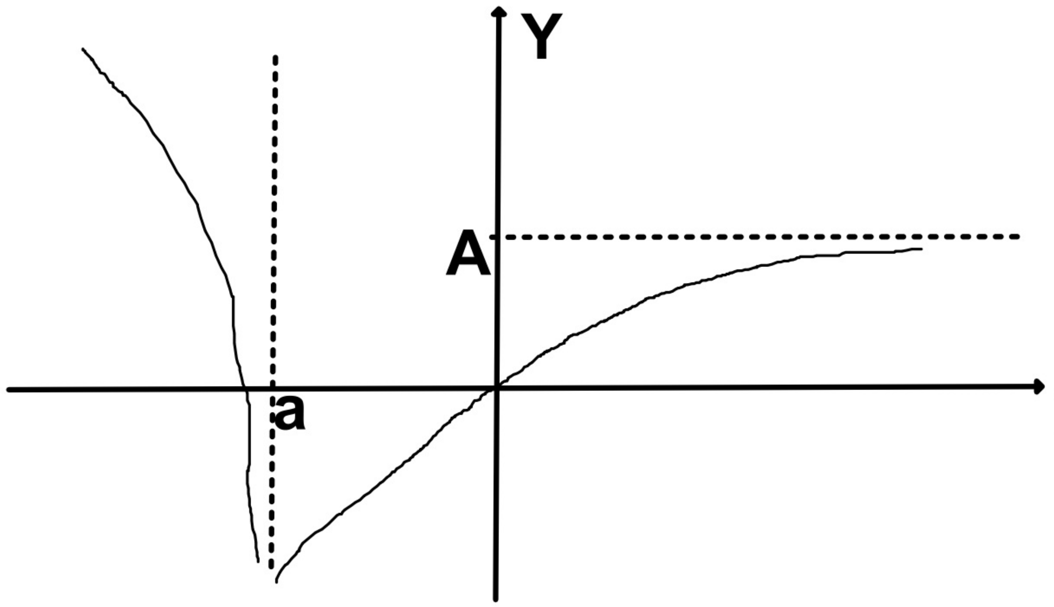
Nosaki robežas $\lim_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim_{x \to a+0} f(x)$

$\lim_{x \to a-0} f(x)$



Nosaki robežas $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to a+0} f(x)$

$\lim\limits_{x\to a-0} f(x)$



Nosaki robežas $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x \to a+0} f(x)$

$\lim\limits_{x \to a-0} f(x)$

$2x^3$

Uzzīmēt funkcijas f(x) grafiku un pēc zīmējuma noteikt funkcijas vienpusējas robežas definīcijas apgabala intervālu galos

a) $f(x)= 1/x^2$

b) $f(x)=\begin{cases} x+1; \text{ ja } x<2 \\ (x-2)^2, \text{ ja } x>2 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} -x^2+1, \text{ ja } x<1 \\ 1/x, \text{ ja } x>1 \end{cases}$

d) $f(x)= \dfrac{|x|}{x}$

e) $f(x)= \dfrac{x^3 - x^2}{2|x-1|}$

f) $f(x) = \begin{cases} 2^x, \text{ ja } x \geq 0 \\ x, \text{ ja } x<0 \end{cases}$

g) $f(x)= \begin{cases} \log_{0.5} x, \text{ ja } x>1 \\ -x^2, \text{ ja } x \leq 1 \end{cases}$

h) $f(x)= \begin{cases} \sin x, \text{ ja } -\pi/2 \leq x \leq \pi/2 \\ \cos x, \text{ ja } \pi/2 < x \leq \pi \end{cases}$

j) $f(x) = \begin{cases} 2^x, \text{ ja } x \leq 1 \\ \log_2 x, \text{ ja } x>1 \end{cases}$

https://www.khanacademy.org/math/differential-calculus/dc-limits

5.-6.STUNDAS

TEMA: **Funkcijas robeža**

SASNIEDZAMAIS REZULTĀTS:

Zina teorēmas par robežu.
Prot novērst nenoteiktību 0/0 un ∞/∞.

Teorēma par funkciju summas (starpību) robežu.

Ja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ un $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, tad

$$\lim_{x \to a} (f(x) \pm \varphi(x)) = A \pm B$$

Teorēma par funkciju reizinājuma robežu.

Ja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ un $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$, tad

$$\lim_{x \to a} (f(x) \cdot \varphi(x)) = A \cdot B$$

Secinājums:

$$\lim_{x \to a} C \cdot f(x) = \lim_{x \to a} C \cdot \lim_{x \to a} f(x) = C \cdot \lim_{x \to a} f(x)$$

Teorēma par funkciju dalījuma robežu.

Ja $\lim\limits_{x \to a} f(x) = A$ **un** $\lim\limits_{x \to a} \varphi(x) = B$**, tad**

$$\lim_{x \to a} \left(f(x) / \varphi(x)\right) = A/B$$

Ja f(f) definēta pie x=a , tad

$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a)$$

Aprēķini $\lim_{x \to 3}\left(\frac{x}{3}+4\right)$ un pierādi, ka iegūtā

vērtība ir funkcijas robeža, izmantojot funkcijas robežas definīciju.

Aprēķināt funkcijas robežu un pierādīt, ka iegūtā vērtība ir funkcijas robeža, izmantojot funkcijas robežas definīciju.

a) $\lim\limits_{x \to 2} (x^3 - 2x^2 + 3x + 9)$

b) $\lim_{x \to 1} (5x^4 - 3x^3 + x^2 - 3x + 5)$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - 4x + 1}{3 - x}$$

$$\lim_{x \to 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 3}$$

$$\lim_{x \to -1} (2x^3 - 5x^2 + x - 4)$$

f). $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{4x+1}-1}{\sqrt{x+2}-3}$

g) $\lim\limits_{x \to 4} \dfrac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}-1}$

h) $$\lim_{x \to (a-1)} \frac{x^2+x+a}{x-a}$$

i) $\lim_{x \to 5} (5 - \lg^2 x)$

j) $\lim_{x \to 0} \dfrac{5-3^x}{3+2^x} =$

ROBEŽAS APRĒĶINĀŠANA

Teorēmas par robežam nav lietojamas robeža atrašanai , ja f(x) un φ(x) ir bezgalīgi lielas funkcijas.

Ja $\lim_{x \to a} f(x) = \infty$ un $\lim_{x \to a} \varphi(x) = \infty$ (a vietā var būt arī +∞, -∞ vai ∞) Tad šo funkciju dalījuma robežas apzīmēšanai lieto pierakstu:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{\varphi(x)} = \mathrm{I} \frac{\infty}{\infty} \mathrm{I}$$

ko lasa: Nenoteiktība: bezgalība dalīta ar bezgalīb

Ja f(x) un φ(x) ir polinomi lai novērstu I∞/∞I nenoteiktību , tad skaitītāja un saucēja izteiksmes dala ar x^n, kur n ir polinoma φ(x) augstāka pakāpe.

Aprēķināt robežu

$$\lim_{x \to \infty} \frac{2x+3}{5x+1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{15x^2 -3x+5}{3x^2+1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{x^3 - 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{3x^2 - 4x + 2}{x + 1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^2+2x+2}}{3x-1}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\sqrt{x^3+1}}{2x^2-3x}$$

g) $\lim\limits_{x \to \infty} (3^{-x} + 1)$

h) $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{6 \cdot 2^x + 5}{2^x - 3}$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4^x + 3}{2^{x+1}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{4 \cdot 2^x + 3^x}{3 \cdot 2^x + 3^{x+1}}$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(x - \sqrt{x^2 + 5x} \right) =$$

$$\lim_{x \to \infty} \left(\sqrt{x^2+3x} - \sqrt{x^2+4x} \right) =$$

$$\lim_{x \to +\infty} \left(\sqrt{4x^2 + 9x} - 2x \right)$$

$$\lim_{x \to -\infty} \left(\sqrt{9x^2 - 5x} + 3x \right)$$

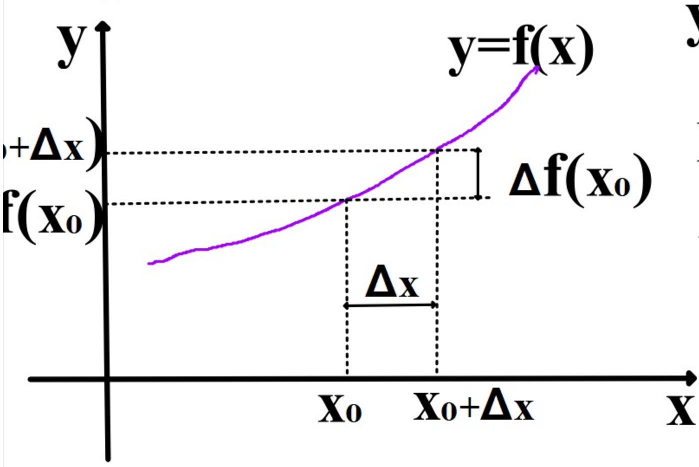
7.-8.STUNDAS

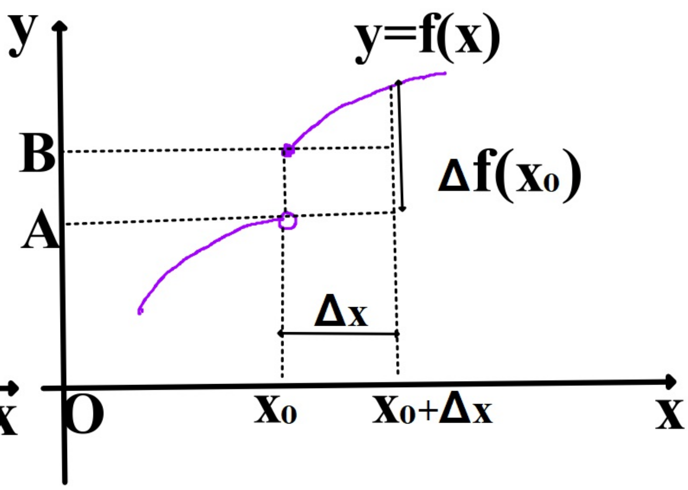
TEMA: **Funkcijas nepārtrauktība**

SASNIEDZAMAIS REZULTĀTS:

Prot definēt funkcijas nepārtrauktību intervālā.
Zina kas ir pārtraukta funkcija, pārtraukuma punkti .
Prot izmantot nepārtrauktības definīciju funkciju robežas apreķināšanai.
Prot noteikt pārtraukuma punktus konkrētai funkcijai.

Aplūkosim nepārtrauktas funkcijas grafiku un grafiku kur funkcijai ir pārtraukums punktā x_0.





Funkcija f(x) ir nepārtraukta punktā x_0, ja šis punkts pieder pie funkcijas definīcijas apgabala, un bezgalīgi mazam argumenta pieaugumam Δx atbilst arī bezgalīgi mazs funkcijas pieaugums $\Delta f(x_0)$ šajā punktā, t.i.

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta f(x_0) = 0$$

Funkcija f(x) ir pārtraukta punktā x_0 , ja šajā punktā tā nav definēta.

Atrast pieauguma izteiksmi $\Delta f(x)$ dotajaji funkcijai:

$f(x)= x^2$

$f(x)=1/x$

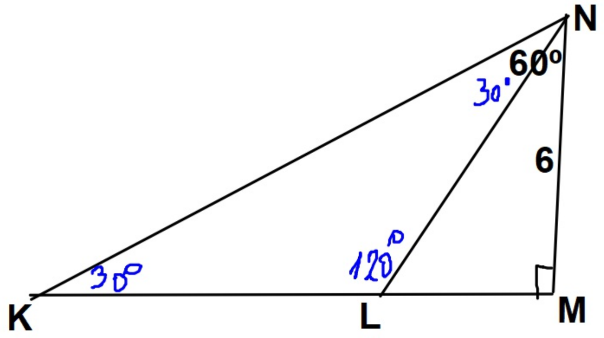
$f(x)=\ln x$

Aprēķini $\Delta f(x)$ funkcijai $f(x)= 9- x^2$

ja $x_0=-2$ $\Delta x= 0.2$

ja $x_0=1$ $\Delta x= -0.1$

ja $x_0=2$ $\Delta x= 0.3$



Дано: ΔKMN - прямоугольный

M=90º , N=60º ,LN- биссектриса

MN=6 cm

KN=? NL=? KL=? $\angle$KNL=? $\angle$KLN=?

ΔKMN: $\angle$NKM=90-$\angle$KNM =90-60=30º

KN=MN/cosN=6/cos60= 12 cm

LN- биссектриса=>$\angle$KNL=$\angle$LNM=30º

ΔKNL: NLK=180º -$\angle$KNL-$\angle$LKN = 180º-30º-30° =120°

ΔMNL: LN=NM/cos$\angle$LNM = 6*2$\sqrt{3}$ =4$\sqrt{3}$ cm

$\angle$K =$\angle$KNL =30º => ΔKNL - равнобедренный (углы при основании равны)

=> KL=LN=4$\sqrt{3}$ cm

$S_{\Delta KNL} = \frac{1}{2} \cdot KL \cdot LN \cdot \sin 120^\circ$ = 0.5*16*3*sin 60° =6$\sqrt{3}$ cm^2