

a) Решите уравнение

$$\sin x + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos x + 1)} = 0$$

$$\sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos x + 1)} = -\sin x$$

$$\begin{cases} \frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos x + 1) = \sin^2 x & (1) \\ -\sin x \geq 0 & (2) \end{cases}$$

$$(1) \quad -\sin x \geq 0 \Leftrightarrow \sin x \leq 0 \Leftrightarrow -\pi + 2\pi n \leq x \leq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$$

$$(2) \quad \frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos x + 1) = \sin^2 x$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos x + 1) = 1 - \cos^2 x$$

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2} \cdot (\cos x + 1) = (1 + \cos x)(1 - \cos x)$$

$$(\cos x + 1) \left(\frac{2-\sqrt{3}}{2} - (1 - \cos x) \right) = 0$$

$$(\cos x + 1) \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{2} - (1 - \cos x) \right) = 0$$

$$(\cos x + 1) \left(\cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = 0$$

$$\begin{cases} \cos x + 1 = 0 \\ \cos x - \frac{\sqrt{3}}{2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_k = \pi + 2\pi k, k \in \mathbb{Z} \\ x_m = \frac{\pi}{6} + 2\pi m, m \in \mathbb{Z} \\ x_l = -\frac{\pi}{6} + 2\pi l, l \in \mathbb{Z} \end{cases}$$

Учет ограничений:

При x_m : $\sin x > 0$

Серия корней x_k и x_l подходит под ограничение.

б) Найдите его корни, принадлежащие отрезку $\left[-4\pi; -\frac{5\pi}{2}\right]$

$$(1) \quad -4\pi \leq -\frac{\pi}{6} + 2\pi l \leq -\frac{5\pi}{2}$$

$$-4\pi + \frac{\pi}{6} \leq -\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{6} + 2\pi l \leq -\frac{5\pi}{2} + \frac{\pi}{6}$$

$$-\frac{23\pi}{6} \leq 2\pi l \leq -\frac{14\pi}{6}$$

$$-\frac{23}{12} \leq l \leq -\frac{7}{6}$$

Так как $l \in \mathbb{Z}$, а на данном промежутке нет целых чисел, то корень x_l не входит в искомый отрезок.

$$(2) \quad -4\pi \leq \pi + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2}$$

$$-4\pi - \pi \leq \pi - \pi + 2\pi k \leq -\frac{5\pi}{2} - \pi$$

$$-5\pi \leq 2\pi k \leq -3,5\pi$$

$$-2,5 \leq k \leq -1,75$$

Так как $k \in \mathbb{Z}$, то $k = -2 \Rightarrow x = \pi + 2\pi \cdot (-2) = \pi - 4\pi = -3\pi$

Ответ: а) $\left\{ \pi + 2\pi k; -\frac{\pi}{6} + 2\pi l \right\}, k \in \mathbb{Z}, l \in \mathbb{Z}$; б) -3π .