Пусть $a$ – кол-во пришедших в 5ый раз студентов. Тогда в этот раз пересдач $\frac{2a}{3}-\frac{1}{3}$, а сдало экзамен $\frac{a}{3}+\frac{1}{3}$ студентов, и в прошлый раз было $a$ пересдач.

Отметим, что если пересдач было $x$, то на экзамен пришло $\left(x+\frac{1}{3}\right)\*\frac{3}{2}$, а сдало экзамен $\left(\left(x+\frac{1}{3}\right)\*\frac{3}{2}\right)\*\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{x}{2}+\frac{1}{2}$. $(1)$
Тогда в 4ый раз сдало $\frac{a}{2}+\frac{1}{2}$ студентов, а пришло на экзамен $\left(a+\frac{1}{3}\right)\*\frac{3}{2}$. Тогда в 3ий раз было $\left(a+\frac{1}{3}\right)\*\frac{3}{2}$ пересдач.
Повторяя рассуждения, приведенные выше, подставляя в соотношения $(1)$ соответствующие величины и упрощая выражения, получим таблицу:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № Тип | Сдано | Пересдача | Всего |
| 1 | $$\frac{27a+27}{16}$$ | $$\frac{27a+19}{8}$$ | $$\frac{81a+65}{16}$$ |
| 2 | $$\frac{9a+9}{8}$$ | $$\frac{9a+5}{4}$$ | $$\frac{27a+19}{8}$$ |
| 3 | $$\frac{3a+3}{4}$$ | $$\frac{3a+1}{2}$$ | $$\frac{9a+5}{4}$$ |
| 4 | $$\frac{a+1}{2}$$ | $$a$$ | $$\frac{3a+1}{2}$$ |
| 5 | $$\frac{a+1}{3}$$ | $$\frac{2a-1}{3}$$ | $$a$$ |

Для выполнения условия задачи необходимо, чтобы все числа в таблице были натуральными (или 0).

Для удобства преобразуем выражения в таблице:

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| № Тип | Сдано | Пересдача | Всего |
| 1 | $$\frac{27(a+1)}{16}$$ | $$\frac{27(a+1)}{8}-1$$ | $$\frac{81(a+1)}{16}-1$$ |
| 2 | $$\frac{9(a+1)}{8}$$ | $$\frac{9(a+1)}{4}-1$$ | $$\frac{27(a+1)}{8}-1$$ |
| 3 | $$\frac{3(a+1)}{4}$$ | $$\frac{3(a+1)}{2}-1$$ | $$\frac{9(a+1)}{4}-1$$ |
| 4 | $$\frac{a+1}{2}$$ | $$\left(a+1\right)-1$$ | $$\frac{3(a+1)}{2}-1$$ |
| 5 | $$\frac{a+1}{3}$$ | $$\frac{2(a+1)}{3}-1$$ | $$\left(a+1\right)-1$$ |

1. Столбец "Сдано": 27 и 16 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 16$; 9 и 8 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 8$; 3 и 4 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 4$; 1 и 2 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 2$; 1 и 3 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 3$

Следовательно $\left(a+1\right)\vdots НОК\left(16, 8, 4, 2, 3\right)=48$

1. Столбец "Пересдача": 27 и 8 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 8$; 9 и 4 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 4$; 3 и 2 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 2$; - ; 2 и 3 взаимно просты $\rightarrow (a+1)\vdots 3$

Следовательно $\left(a+1\right)\vdots НОК\left( 8, 4, 2, 3\right)=24$

1. Столбец "Всего": не имеет смысла его рассматривать, так как он никаких новых условий не даст: все числа в нем, с учетом записанных выше ограничений, – сумма двух целых чисел, т.е. целое число.

По итогу $\left(a+1\right)\vdots 48$. Значит $a=48k-1, k\in N$.

Т.к. $\frac{2a-1}{3}$ возрастает на области определения, то и минимальное значение на отрезке принимает при наименьшем значении аргумента. Тогда минимум пересдач будет при минимальном $a$=47. Тогда минимальное число пересдач 31.
А всего могло быть $\frac{81(48k-1)+65}{16}=243k-1$ студентов.