

Содержание

Построение графика ф-ии $y = f(x) + k$ по графику ф-ии $y = f(x)$	2
Построение графика ф-ии $y = f(x + k)$ по графику ф-ии $y = f(x)$	4
Построение графика ф-ии $y = k * f(x)$ по графику ф-ий $y = f(x)$	6
Построение графика ф-ии $y = k_1 f(x + k_2) + k_3$ по графику ф-ии $y = f(x)$	9

Построение графика ф-ии $y = f(x) + k$ по графику ф-ии $y = f(x)$

Если $k > 0$ график старой ф-ии $y = f(x)$ поднимаем $\uparrow$ вверх на число k и получаем график новой ф-ии $y = f(x) + k$; или, что тоже самое, ось OX опускаем $\downarrow$ вниз на то же число k .

Если $k < 0$ график старой ф-ии $y = f(x)$ опускаем $\downarrow$ вниз на число k и получаем график новой ф-ии $y = f(x) + k$; или, что тоже самое, ось OX поднимаем $\uparrow$ вверх на то же число k .

$$\text{Почему? } \begin{cases} y_{old} = f(x) \\ y_{new} = f(x) + k \end{cases} \rightarrow y_{new} = y_{old} + k$$

Т.е. чтобы задать НОВЫЙ график нужно изменить ординату каждой точки старого графика на величину k , при чем, если $k > 0$ – увеличить, если $k < 0$ – уменьшить – что можно заменить на противоположные движению СТАРОГО графика смещения оси OX , при чем, если $k > 0$ – ось OX смещается вниз (противоположно движению графика вверх), если $k < 0$ – ось OX смещается вверх (противоположно движению графика вниз)

$$y = f(x) + k$$

$$k > 0$$

График $\uparrow$

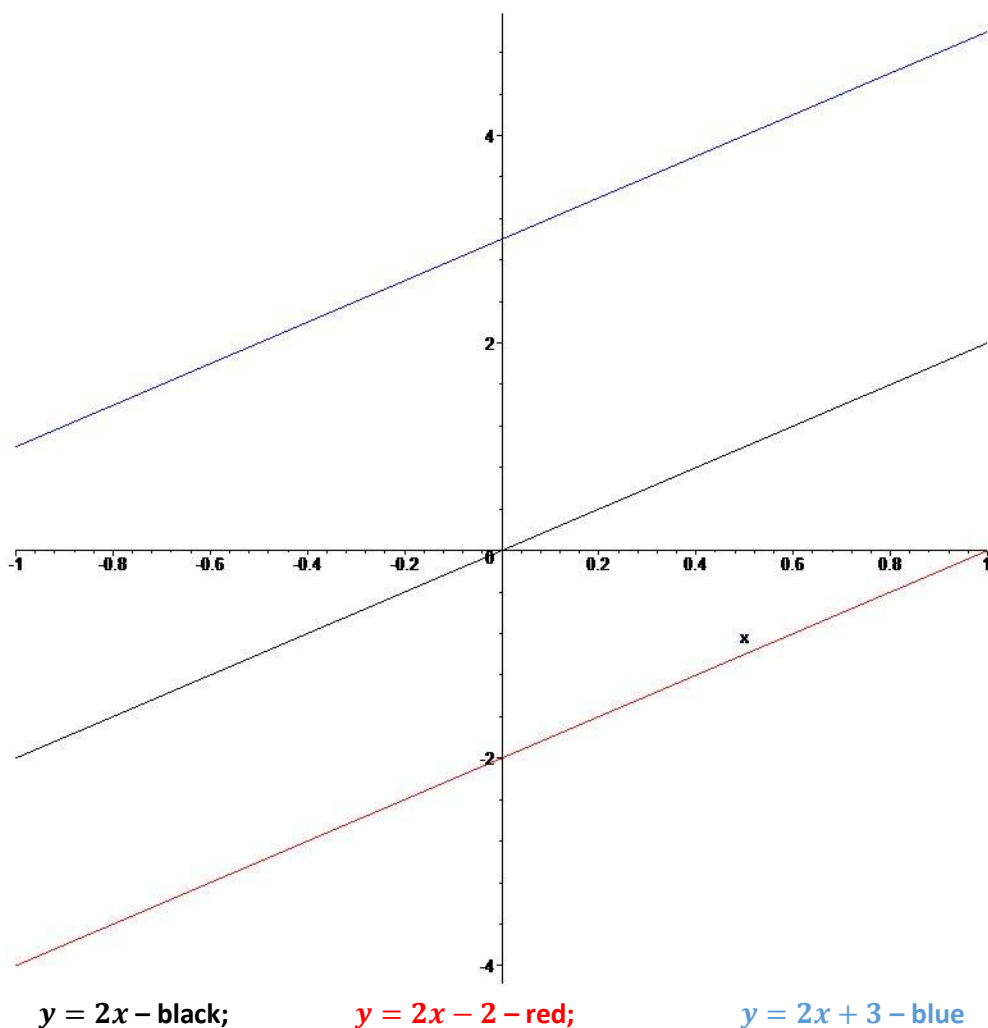
или $OX \downarrow$

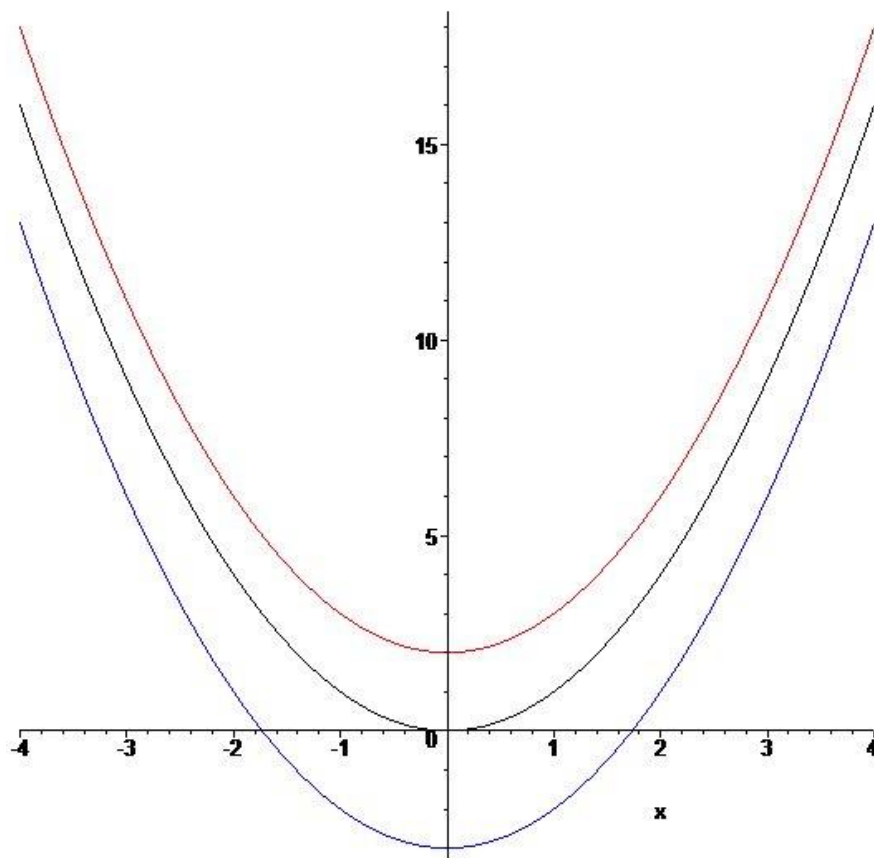
$$k < 0$$

График $\downarrow$

или $OX \uparrow$

Проследить, как сдвинулся **СТАРЫЙ** график.

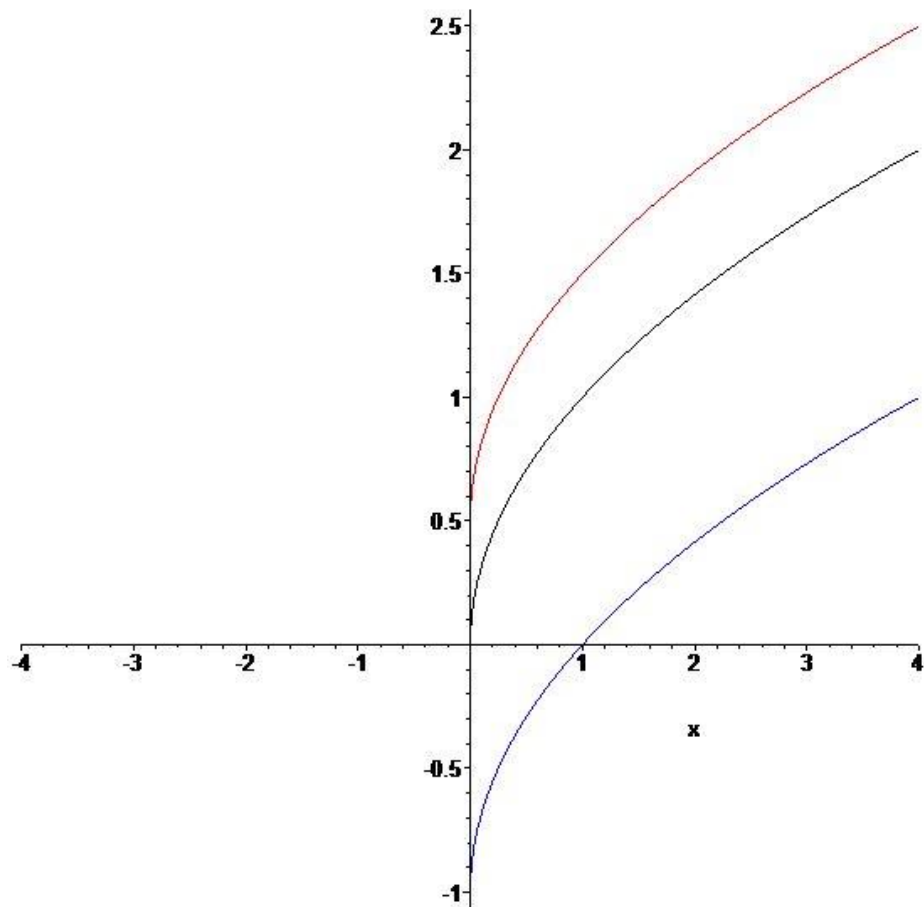




$y = x^2$ – black;

$y = x^2 - 2$ – red;

$y = x^2 - 3$ – blue



$y = \sqrt{x}$ – black;

$y = \sqrt{x} - 1$ – red;

$y = \sqrt{x} + 0,5$ – blue

Построение графика ф-ии $y = f(x + k)$ по графику ф-ии $y = f(x)$

Если $k > 0$ график старой ф-ии $y = f(x)$ сдвигаем $\leftarrow$ влево на число k и получаем график новой ф-ии $y = f(x + k)$; или, что тоже самое, ось OY сдвигаем $\rightarrow$ вправо на то же число k .

Если $k < 0$ график старой ф-ии $y = f(x)$ сдвигаем $\rightarrow$ вправо на число k и получаем график новой ф-ии $y = f(x + k)$; или, что тоже самое, ось OY сдвигаем $\leftarrow$ влево на то же число k .

$$\text{Почему? } x_{old} = x_{new} + k \rightarrow x_{new} = x_{old} - k$$

Т.е. чтобы задать НОВЫЙ график нужно изменить абсциссу каждой точки старого графика на величину k , при чем, если $k > 0$ – уменьшить, если $k < 0$ – увеличить – что можно заменить на противоположные движению СТАРОГО графика смещения оси OY , при чем, если $k > 0$ – ось OY смещается вправо (противоположно движению графика влево), если $k < 0$ – ось OY смещается влево (противоположно движению графика вправо)

$$y = f(x + k)$$

$$k > 0$$

График $\leftarrow$

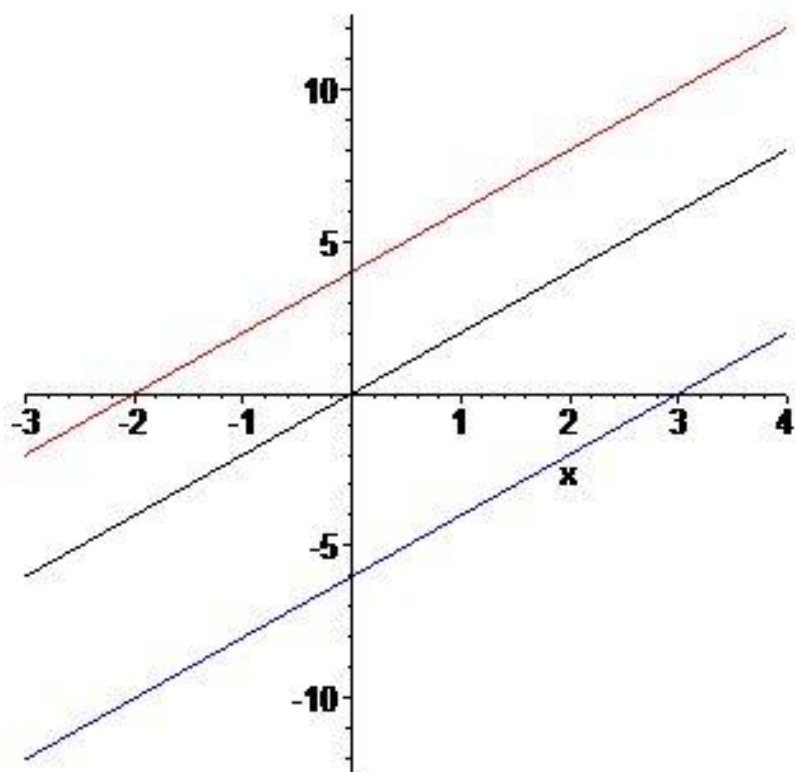
или $OY \rightarrow$

$$k < 0$$

График $\rightarrow$

или $OY \leftarrow$

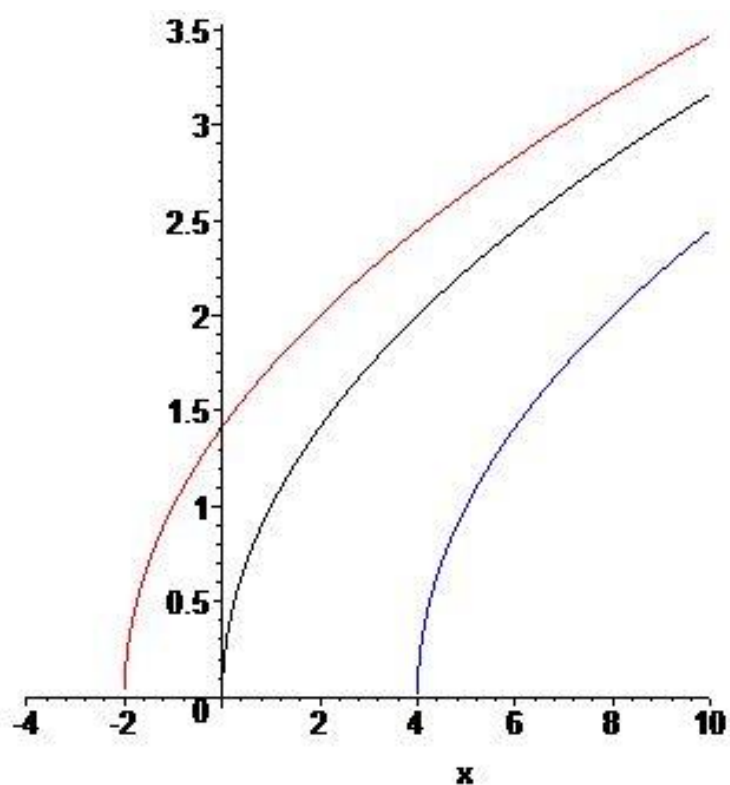
Проследить, как сдвинулся **СТАРЫЙ** график.



$$y = 2x - \text{black;}$$

$$y = 2(x + 2) - \text{red;}$$

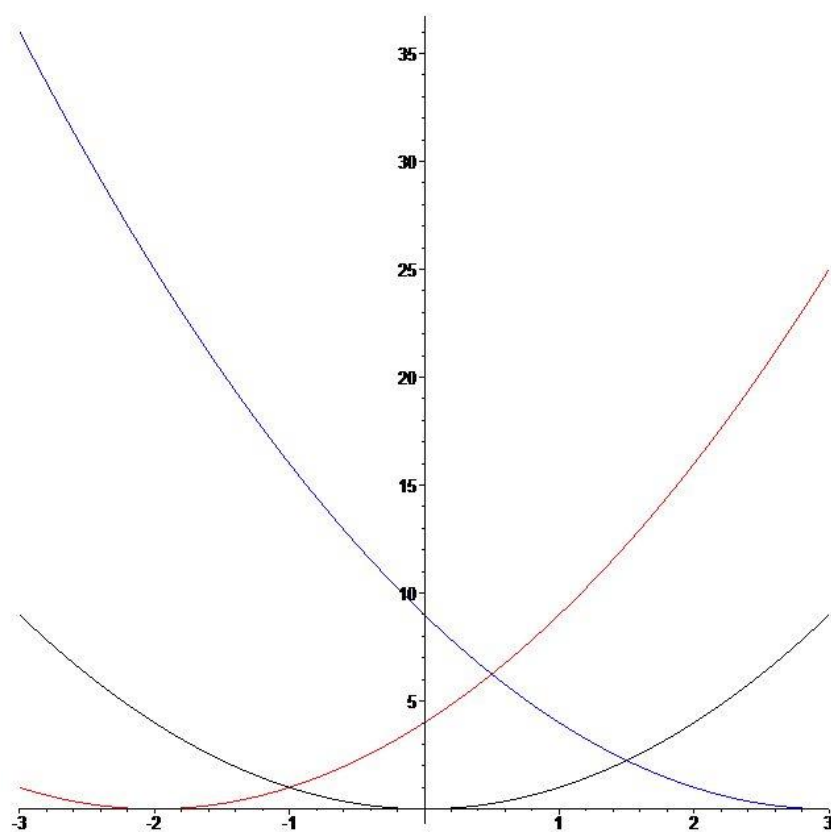
$$y = 2(x - 3) - \text{blue}$$



$$y = \sqrt{x} - \text{black};$$

$$y = \sqrt{x+2} - \text{red};$$

$$y = \sqrt{x-4} - \text{blue}$$



$$y = x^2 - \text{black};$$

$$y = (x+2)^2 - \text{red};$$

$$y = (x-3)^2 - \text{blue}$$

Построение графика ф-ии $y = k * f(x)$ по графикам некоторых ф-ий $y = f(x)$

Это случай масштабирования оси абсцисс OX в случае ф-ий.

Вопрос во сколько раз?

1) Вот если имеем дело с линейной функцией с нулевым свободным членом ($y = ax$), то:

если $|k| > 1$ ось «сжимается» – для каждой точки графика значение ординаты сохраняется, и, при этом, значение абсциссы заменяется на уменьшенное в $|k|$ раз по абсолютной величине.

если $|k| < 1$ ось «затягивается» – для каждой точки графика значение ординаты сохраняется, и, при этом, значение абсциссы заменяется на увеличенное в $|k|$ раз по абсолютной величине.

$$\text{Почему? } x_{old} = kx_{new} \rightarrow x_{new} = \frac{x_{old}}{k}$$

2) Если имеем дело с ф-ей вида $y(x) = a\sqrt{x}$, то будем иметь соответствующее масштабирование в k^2 раз (если $|k| > 1$ ось «сжимается»; если $|k| < 1$ ось «затягивается»).

$$\text{Почему? } y_{new} = ka\sqrt{x_{new}} = \frac{a\sqrt{k^2x_{new}}}{-a\sqrt{k^2x_{new}}}, \text{ если } k>0 \equiv a\sqrt{x_{old}} \rightarrow x_{old} = k^2x_{new} \rightarrow x_{new} = \frac{x_{old}}{k^2}$$

3) Если имеем дело с ф-ей $y(x) = ax^2$, то масштабирование будет в $\sqrt{|k|}$ раз (если $|k| > 1$ ось «сжимается»; если $|k| < 1$ ось «затягивается»).

$$\text{Почему? } y_{new} = kax_{new}^2 = \frac{a(\sqrt{|k|x_{new}})^2}{-a(\sqrt{|k|x_{new}})^2}, \text{ если } k>0 \equiv ax_{old}^2 \rightarrow x_{old} = \sqrt{|k|x_{new}} \rightarrow x_{new} = \frac{x_{old}}{\sqrt{|k|}}$$

4) Если имеем дело с ф-ей $y = \frac{a}{x}$, то масштабирование будет в раз (если $|k| > 1$ ось «затягивается»; если $|k| < 1$ ось «сжимается»).

$$\text{Почему? } y_{new} = \frac{ka}{x_{new}} = \frac{a}{\frac{x_{new}}{k}} \equiv \frac{a}{x_{old}} \rightarrow x_{old} = \frac{x_{new}}{k} \rightarrow x_{new} = kx_{old}$$

Нужно быть тут аккуратным, ведь указанные размышления применимы в случае когда имеет место пропорциональность, когда, к примеру, $y \sim x^\alpha$ (в 1-ом $\alpha = 1$; 2-ом $\alpha = \frac{1}{2}$; 3-ем $\alpha = 2$; 4-ом $\alpha = -1$ случаях). Т.е. в случае, когда пропорциональности степени x у ф-ии $f(x)$ нет, указанный алгоритм масштабирования не работает. Пример для ф-ии $f(x) = y_{new} = k * f(x) = k(ax + b)$ нет пропорциональности степени x , потому что есть свободный член b и пойти путем случая 1) будет не верно; размышления почему остаются читателю. Также будет и в случае ф-ий: $a\sqrt{x} + b$, $a\sqrt{x+b}$, $a\sqrt{x+b} + c$, $ax^2 + b$, $a(x+b)^2$, $a(x+b)^2 + c$, $\frac{a}{x} + b$, $\frac{a}{x+b}$, $\frac{a}{x+b} + c$.

Примечания:

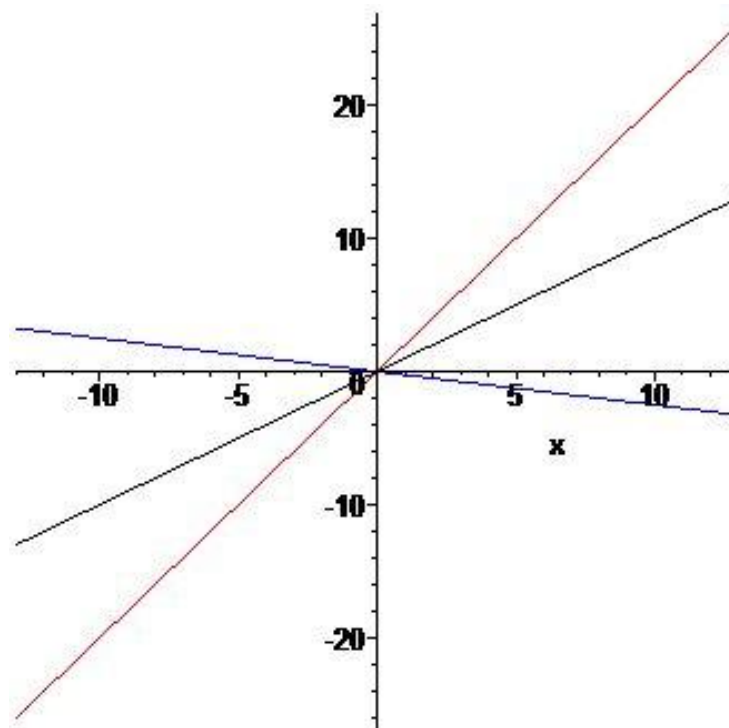
- в случае 1) упоминались слова по абсолютной величине; они связаны с тем фактом, что при $k < 0$, кроме масштабирования оси OX , также будет иметь место симметричное отображения масштабированного графика относительно начала координат (эти суждения распространяется и на случаи 2), 3), 4));

- для ф-ий $a\sqrt{x+b}$, $a(x+b)^2$, $\frac{a}{x+b}$ все же будет иметь место масштабирование за указанными алгоритмами, но для того, что бы верно построить результирующий график в начале нужно сдвинуть ось OY на величину b и масштабировать уже график $\frac{a}{x_{new}}$, где $x_{new} = x_{old} - k$.

- отметим, что случай 4) «противоположный» случаям 1), 2), 3), и более того, можно заключить следующее: для ф-ий $y \sim x^\alpha$ при $\alpha > 0$ график/ось OX будут «сжиматься», если $|k| > 1$, и «затягиваться», если $|k| < 1$; при $\alpha < 0$ – наоборот, график/ось OX будут «затягиваться», если $|k| > 1$, и «сжиматься», если $|k| < 1$.

$y \sim x^\alpha$	$\alpha > 0$	$ k > 1$	график/ось OX «сжимаются»
		$ k < 1$	график/ось OX «затягиваются»
	$\alpha < 0$	$ k > 1$	график/ось OX «затягиваются»
		$ k < 1$	график/ось OX «сжимаются»

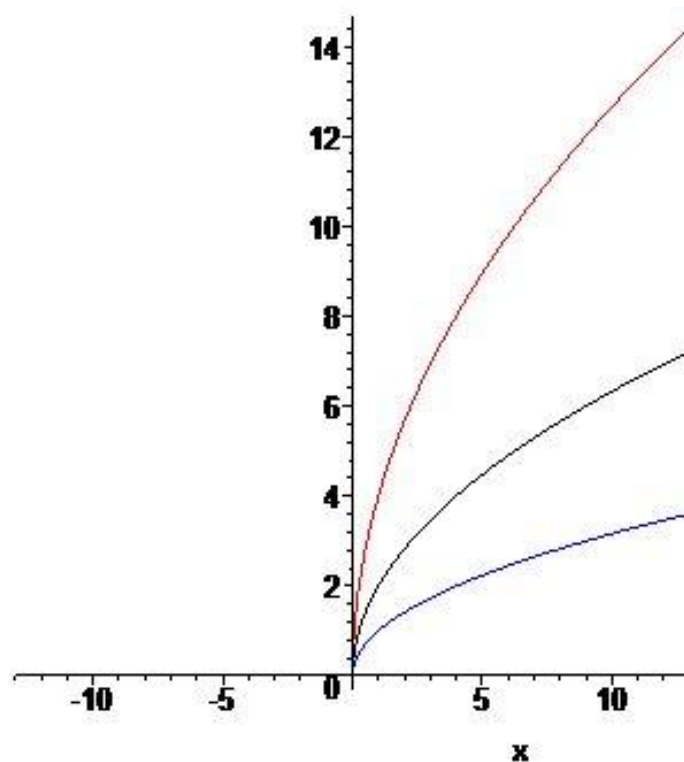
Проследить, как изменился **СТАРЫЙ** график/масштаб оси.



$y = x$ – black;

$y = 2x$ – red;

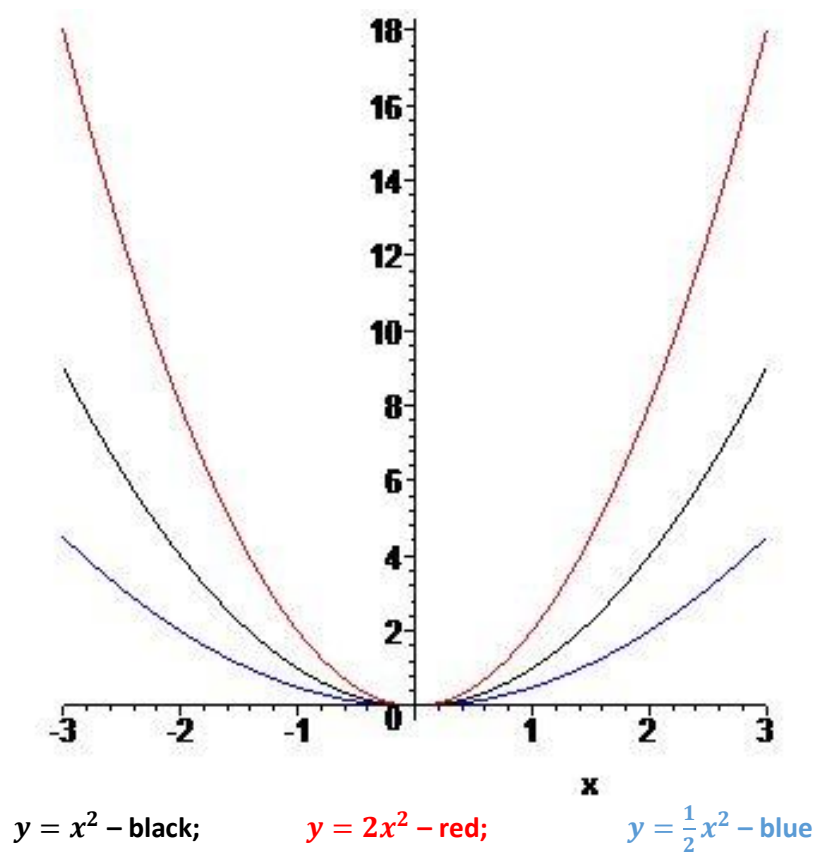
$y = -\frac{1}{4}x$ – blue



$y = 2\sqrt{x}$ – black;

$y = 2 * 2\sqrt{x}$ – red;

$y = \frac{1}{2} * 2\sqrt{x}$ – blue



Построение графика ф-ии $y = k_1 f(x + k_2) + k_3$ по графику ф-ии $y = f(x)$

Имеем «общий» случай, не трудно убедиться, что он является компиляцией всех вышеизложенных.

Пример 1

$$y = k_1(ax + k_2) + k_3:$$

Путь 1 (формальный)

Шаг1 – строим ф-ию $y = x$;

Шаг2 – строим ф-ию $y = ax$ по ф-ии $y = x$ масштабируя ее и при необходимости выполняя симметричное отражении относительно начала координат;

Шаг3 – получаем график ф-ии $y = ax + k_2$ смещением графика ф-ии $y = ax$ или оси OY ;

Шаг4 – график ф-ии $y = k_1(ax + k_2)$ получаем по графику ф-ии $y = ax + k_2$ масштабированием последнего;

Шаг5 – окончательный график $y = k_1(ax + k_2) + k_3$ получаем сдвигом графика $y = k_1(ax + k_2)$ или оси OX .

Путь 2 (оптимальный)

$$\text{Шаг1} - y(x) = k_1(ax + k_2) + k_3 = k_1ax + (k_1k_2 + k_3)$$

Шаг2 – строим ф-ию $y = k_1ax$ по ф-ии $y = x$ масштабируя ее и при необходимости выполняя симметричное отражении относительно начала координат;

Шаг3 – получаем график ф-ии $y = k_1ax + (k_1k_2 + k_3)$ смещением графика $y = k_1ax$ или оси OX ;

Пример 2

$$y = k_1\sqrt{k_2x + k_3} + k_4 \text{ (берем тут } k_2 > 0 \text{ в связи с последующими выкладками):}$$

Путь 2 (оптимальный)

$$\text{Шаг1} - y(x) = k_1\sqrt{k_2x + k_3} + k_4 = k_1\sqrt{k_2\left(x + \frac{k_3}{k_2}\right)} + k_4 = k_1\sqrt{k_2} * \sqrt{x + \frac{k_3}{k_2}} + k_4$$

$$\text{Шаг2} - \text{строим ф-ию } y = \sqrt{x + \frac{k_3}{k_2}} \text{ смещением графика ф-ии } y = \sqrt{x + \frac{k_3}{k_2}} \text{ или оси } OY;$$

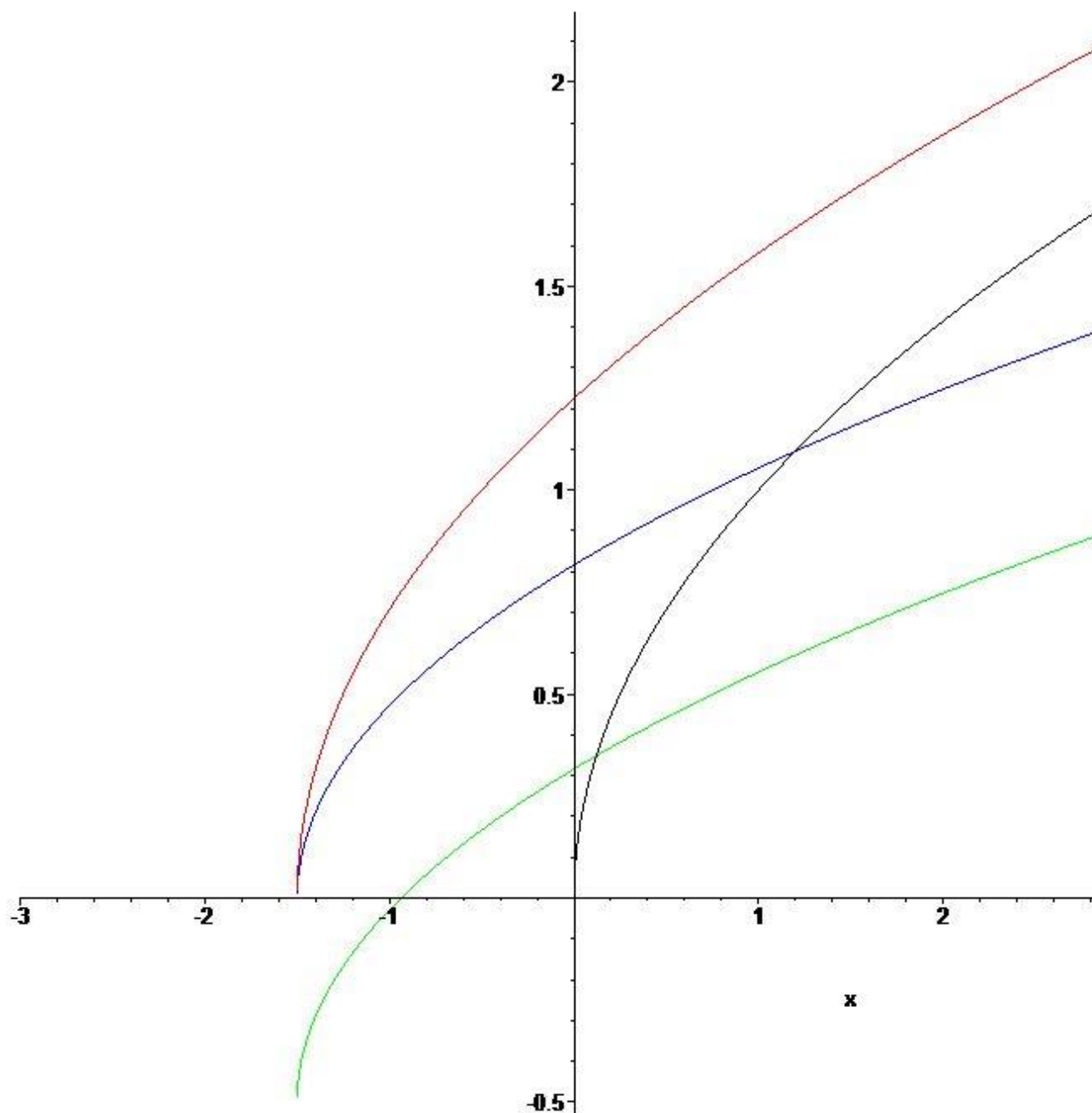
$$\text{Шаг3} - \text{график ф-ии } y = k_1\sqrt{k_2} * \sqrt{x + \frac{k_3}{k_2}} \text{ получаем по графику ф-ии } y = \sqrt{x + \frac{k_3}{k_2}} \text{ масштабированием последнего;}$$

$$\text{Шаг4} - \text{окончательный график ф-ии } y = k_1\sqrt{k_2} * \sqrt{x + \frac{k_3}{k_2}} + k_4 \text{ получаем сдвигом графика } y = k_1\sqrt{k_2} * \sqrt{x + \frac{k_3}{k_2}} \text{ или оси } OX.$$

Примеры 3, 4

$$y = k_1(ax + k_2)^2 + k_3 = k_1\left[a\left(x + \frac{k_2}{a}\right)\right]^2 + k_3 = k_1a^2\left(x + \frac{k_2}{a}\right)^2 + k_3 - \text{аналогичные Шаги;}$$

$$y = \frac{k_1}{ax + k_2} + k_3 = \frac{k_1}{a(x + k_2/a)} + k_3 = \frac{k_1/a}{x + k_2/a} + k_3 - \text{аналогичные Шаги.}$$



$$y = \sqrt{x} - \text{black} \quad y = \sqrt{x+1.5} - \text{red} \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{x+1.5} - \text{blue} \quad y = \frac{2}{3}\sqrt{x+1.5} - 0.5 - \text{green}$$

Шаг 1 – строим график ф-ии $y = \sqrt{x}$ – black;

Шаг 2 – смещаем ось OY вправо $\rightarrow$ на 1.5 и получаем график ф-ии $y = \sqrt{x+1.5}$ – red (можно было двигать график ф-ии $y = \sqrt{x}$ – black влево $\leftarrow$ на 1.5);

Шаг 3

– «сжимаем» график ф-ии $y = \sqrt{x+1.5}$ – red или ось OX в 2 раза и получаем график ф-ии $y = 2\sqrt{x+1.5}$;

– «растягиваем» график ф-ии $y = 2\sqrt{x+1.5}$ или ось OX в 3 раза и получаем график ф-ии $y = \frac{2}{3}\sqrt{x+1.5}$ – blue

Шаг 4 – сдвигаем ось OX вверх $\uparrow$ на 0.5 и получаем график ф-ии $y = \frac{2}{3}\sqrt{x+1.5} - 0.5$ (можно было двигать график ф-ии $y = \frac{2}{3}\sqrt{x+1.5}$ – blue вниз $\downarrow$ на 0.5).

Примечание: изложенные принципы распространяются и на все другие элементарные ф-ии (изучаемые в школе) и в общем на ф-ии одной переменной.