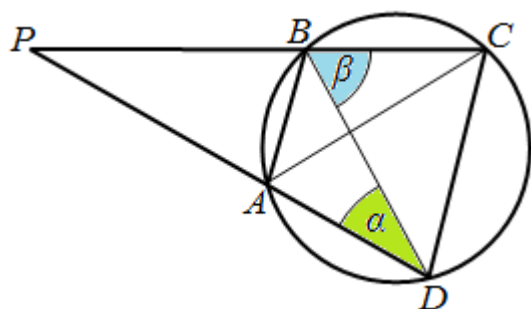


Четырёхугольник $ABCD$ со сторонами $AB=10$ и $CD=13$ вписан в окружность. Продолжения сторон BC и AD этого четырёхугольника пересекаются в точке P , причём угол $APB=30^\circ$ градусов. Найдите радиус окружности, описанной вокруг четырёхугольника $ABCD$.



Окружность, описанная около четырёхугольника $ABCD$, описана и около треугольников ABD и BCD . По обобщённой теореме синусов (см. рисунок) $\frac{CD}{\sin \beta} = 2R$ и $\frac{AB}{\sin \alpha} = 2R$, где R – радиус окружности, описанной около четырёхугольника $ABCD$ и треугольников BCD и ABD . Отсюда

$$\frac{CD}{\sin \beta} = \frac{AB}{\sin \alpha}. \quad \beta - \text{внешний угол треугольника } PBD, \text{ и поэтому}$$

$$\beta = \angle P + \alpha = 30^\circ + \alpha = \alpha + \frac{\pi}{6}.$$

Получаем уравнение $\frac{13}{\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right)} = \frac{10}{\sin \alpha} \Leftrightarrow 13 \sin \alpha = 10 \sin \alpha \cdot \cos \frac{\pi}{6} + 10 \cos \alpha \cdot \sin \frac{\pi}{6};$

$$13 \sin \alpha - 5\sqrt{3} \sin \alpha - 5 \cos \alpha = 0 \Leftrightarrow (13 - 5\sqrt{3}) \sin \alpha = 5 \cos \alpha \Leftrightarrow \operatorname{tg} \alpha = \frac{5}{13 - 5\sqrt{3}}.$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{13 - 5\sqrt{3}} \cos \alpha \Rightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25}{169 - 130\sqrt{3} + 75} \cos^2 \alpha;$$

$$\sin^2 \alpha = \frac{25}{244 - 130\sqrt{3}} \cos^2 \alpha; \left(1 + \frac{25}{244 - 130\sqrt{3}}\right) \sin^2 \alpha = \frac{25}{244 - 130\sqrt{3}};$$

$$\frac{269 - 130\sqrt{3}}{244 - 130\sqrt{3}} \sin^2 \alpha = \frac{25}{244 - 130\sqrt{3}} \Leftrightarrow \sin^2 \alpha = \frac{25}{269 - 130\sqrt{3}};$$

$$\sin \alpha = \frac{5}{\sqrt{269 - 130\sqrt{3}}} = 0,75521 \text{ (сосчитано в MS Excel).}$$

$$R = \frac{AB}{2 \sin \alpha} = \frac{5}{\sin \alpha} \approx 6,620679.$$