

Определить минимальный диаметр воздушного шара с тонкой оболочкой необходимый для подъёма. Масса конструкции и пассажиров $m = 500$ кг, температура воздуха в оболочке $t_{об} = 80$ С, температура наружного воздуха $t_n = 15$ С, атмосферное давление $p = 10^5$ Па ($M_B = 29$ г / моль)

ДАНО:

$$m_{гр} = 500 \text{ кг}$$

$$T_{об} = 80^\circ\text{C} = 353,15 \text{ К}$$

$$T_x = 15^\circ\text{C} = 288,15 \text{ К}$$

$$p = 10^5 \text{ Па}$$

$$M_B = 29 \text{ г/моль} = 0,029 \text{ кг/моль}$$

РЕШЕНИЕ.

Или как я решал такую задачу в детстве. Я представил процесс нагревания воздуха в оболочке так: Горелка снизу греет воздух, давление должно возрасти, но избыток воздуха выходит через нижнее отверстие в оболочке и тем самым в ней поддерживается постоянное давление. При этом считаем, что оболочка «расправлена», объем ее постоянный, а вот масса воздуха в оболочке уменьшилась. Таким образом нагретый воздух имеет меньшую массу чем холодный в том же объеме (при том же давлении), а следовательно меньшую плотность. Вот теперь, если вычислить эту плотность нагретого воздуха, можно воспользоваться законом Архимеда для расчета подъемной силы.

Чтобы шар поднимался вверх, подъемная сила должна быть больше, силы тяжести, действующей на конструкцию шара и груз (пассажиров).

Чтобы описать процесс расширения с помощью формул/чисел, использовалось уравнение Менделеева-Клапейрона.

$$pV = \frac{m}{M_B} RT \quad (1)$$

p — давление воздуха (и в оболочке и в окружающем воздухе оно

одинаковое. Оболочка у таких шаров открытая снизу).

V — объем оболочки [м^3].

m — масса воздуха в оболочке [кг].

T — температура воздуха в оболочке [K].

R — универсальная газовая постоянная 8,31 [Дж/(моль·K)]

$M_{\text{в}}$ — молярная масса воздуха (принята 0,029 кг/моль).

Разделим в (1) обе части уравнения на V и перепишем его в виде:

$$p = \frac{m}{VM_{\text{в}}} RT = \frac{\rho}{M_{\text{в}}} RT \quad (2)$$

Где буквой ρ обозначена плотность газа (воздуха). $\rho = \frac{m}{V}$

Запишем уравнение состояния идеального газа для воздуха в оболочке в начальном (холодном) и конечном (горячем) состояниях.

$$p = \frac{\rho_1}{M_{\text{в}}} RT_{\text{н}} \quad (3)$$

$$p = \frac{\rho_2}{M_{\text{в}}} RT_{\text{об}} \quad (4)$$

Из (3), (4) выражаем плотности холодного и горячего воздуха.

$$\rho_1 = \frac{pM_{\text{в}}}{RT_{\text{н}}} \quad (5)$$

$$\rho_2 = \frac{pM_{\text{в}}}{RT_{\text{об}}} \quad (6)$$

Теперь, используя закон Архимеда, выражаем подъемную силу.

$$F_{\text{н}} = F_{\text{А}} - F_2 = \rho_1 g V - \rho_2 g V = gV(\rho_1 - \rho_2) \quad (7)$$

Тут :

$F_{\text{А}}$ — архимедова сила, выталкивающая оболочку вверх. Равна весу холодного воздуха в объеме оболочки.

F_2 — сила тяжести, действующая на воздух в оболочке.

g — ускорение свободного падения у поверхности Земли. 9,8 м/с².

Подставим в (7) вместо ρ_1 , ρ_2 выражения (5) (6). Получим выражение для подъемной силы.

$$F_n = gV(\rho_1 - \rho_2) = gV \left(\frac{pM_{\epsilon}}{RT_n} - \frac{pM_{\epsilon}}{RT_{об}} \right) = \frac{gpVM_{\epsilon}}{R} \left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{об}} \right) \quad (8)$$

Учтем то, что оболочка имеет форму шара и её объем, выраженный через диаметр равен:

$$V = \frac{4}{3} \cdot \frac{\pi D^3}{8} = \frac{\pi D^3}{6} \quad (9)$$

Тогда, учитывая (9), выражение для подъемной силы (8) принимает вид:

$$F_n = \frac{gpM_{\epsilon}\pi D^3}{6R} \left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{об}} \right) \quad (10)$$

Теперь осталось приравнять подъемную силу и силу тяжести, действующую на оснастку с грузом общей массой 500 кг, и выразить диаметр шара.

$$\begin{aligned} F_n &= F_m \\ \frac{gpM_{\epsilon}\pi D^3}{6R} \left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{об}} \right) &= m_{zp}g \\ \frac{pM_{\epsilon}\pi D^3}{6R} \left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{об}} \right) &= m_{zp} \\ D^3 &= \frac{6Rm_{zp}}{\pi pM_{\epsilon} \left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{об}} \right)} \\ D &= \sqrt[3]{\frac{6Rm_{zp}}{\pi pM_{\epsilon} \left(\frac{1}{T_n} - \frac{1}{T_{об}} \right)}} \quad (11) \end{aligned}$$

Подставим в (11) числовые значения величин и вычислим минимальный диаметр.

$$D \approx \sqrt[3]{\frac{6 \cdot 8,31 \cdot 500}{3,1416 \cdot 10^5 \cdot 0,029 \left(\frac{1}{288,15} - \frac{1}{353,15} \right)}} = \sqrt[3]{\frac{831 \cdot 30}{314,16 \cdot 29 \left(\frac{1}{288,15} - \frac{1}{353,15} \right)}} \approx 16,24 \text{ м}$$

ОТВЕТ: D≈16,24 м.