

<https://znanija.com/task/22153075>

На сплошной цилиндр массой  $m=8$  кг намотана тонкая нить, свободный конец которой прикреплен к потолку. Найти расстояние на которое опустится цилиндр под действием силы тяжести за первые 2 секунды своего движения и силу натяжения нити. Трением пренебречь.

### РЕШЕНИЕ.

Ось координат направим вниз. За начало отсчета принимаем начальное положение цилиндра.

Движение цилиндра будет складываться из 2-х видов: поступательного и вращательного. Центр масс (и ось) цилиндра будет опускаться вниз, при этом цилиндр будет раскручиваться вокруг своей оси.

Для поступательного равноускоренного движения центра масс зависимость высоты  $h$  (перемещения) от времени:

$$h = \frac{at^2}{2}$$

Учитывая, зависимость скорости (при нулевой начальной),

$$v = at$$

можно выразить высоту через скорость, которую ось цилиндра набрала при достижении этой высоты.

$$h = \frac{(v/t)t^2}{2} = \frac{vt}{2} \quad [1]$$

С другой стороны, исходя из закона сохранения энергии можно записать

$$E_p = E_k + E_r \quad [2]$$

Потенциальная энергия  $E_p$  тела переходит в кинетическую энергию поступательного движения  $E_k$  и кинетическую энергию вращательного движения  $E_r$ . Распишем подробнее выражение [2].

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{J\omega^2}{2} \quad [3]$$

Момент инерции цилиндра равен

$$J = \frac{m R^2}{2} \quad [4]$$

Угловая скорость  $\omega$  связана со скоростью поступательного движения оси  $v$  выражением:

$$\omega = \frac{v}{R} \quad [5]$$

Учитывая [4], [5], выражение [3] можно переписать следующим образом:

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{m R^2 v^2}{2 \cdot 2 R^2} = \frac{mv^2}{2} + \frac{m v^2}{4} \quad [6]$$

Производя возможные сокращения и упрощения, получаем:

$$gh = \frac{3v^2}{4} \quad [7]$$

Отсюда можно выразить скорость поступательного движения.

$$v = \sqrt{\frac{4gh}{3}} = 2\sqrt{\frac{gh}{3}} \quad [8]$$

Подставим [8] в [1].

$$h = \frac{t}{2} \cdot 2\sqrt{\frac{gh}{3}} = t\sqrt{\frac{gh}{3}} \quad [9]$$

И выражаем высоту  $h$ .

$$\sqrt{h} = t\sqrt{\frac{g}{3}}$$

$$h = \frac{t^2 \cdot g}{3} \quad [10]$$

Получается от массы пройденное расстояние не зависит. Зато имеет значение то, что это цилиндр. Точнее имеет значение распределение массы тела вокруг оси вращения. При изменении распределения изменится момент инерции.

Подставим в выражение [10] числовые значения величин, получаем.

$$h \approx \frac{2^2 \cdot 9,8}{3} \approx 13,1 [м]$$

Натяжение нити попробуем определить исходя из 2-го закона Ньютона для вращательного движения

$$M = J \epsilon \quad [11]$$

Выразим угловое ускорение через уже известную нам высоту.

$$\epsilon = \frac{\omega}{t} = \frac{v}{Rt} = \frac{2h}{tRt} = \frac{2h}{Rt^2} \quad [12]$$

Далее подставляем в [11] выражение для момента силы натяжения относительно оси цилиндра

$$M = TR \quad [13]$$

и выражение для момента инерции цилиндра [4]. Получается

$$TR = \frac{mR^2}{2} \cdot \frac{2h}{Rt^2} = \frac{mRh}{t^2}$$

Отсюда натяжение  $T$ .

$$T = \frac{mh}{t^2} \quad [14]$$

$$T \approx \frac{8 \cdot 13,1}{4} = 26,2 [Н]$$

ОТВЕТ:  $h \approx 13,1 [м]$  ,  $T \approx 26,2 [Н]$