

$$9x^2 + \frac{4}{x} + 3x - \frac{2}{x} - 14 = 0$$

ОДЗ.

$$x \neq 0 \quad (1)$$

Произведем замену переменных.

$$\text{Пусть } t = 3x - \frac{2}{x}$$

В результате получаем вспомогательное уравнение.

$$t^2 + 12 + t - 14 = 0$$

$$t^2 - 2 + t = 0$$

$$t^2 + t - 2 = 0$$

Находим дискриминант.

$$D = b^2 - 4ac = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-2) = 9$$

$$t_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$t_1 = \frac{-1-3}{2 \cdot 1} = -2; t_2 = \frac{-1+3}{2 \cdot 1} = 1$$

В этом случае исходное уравнение сводится к уравнению

$$3x - \frac{2}{x} = -2; 3x - \frac{2}{x} = 1$$

решение разбивается на отдельные случаи.

Случай 1 .

$$3x - \frac{2}{x} = -2$$

$$3x - \frac{2}{x} + 2 = 0$$

$$3x+2-\frac{2}{x}=0$$

$$(3x+2)-\frac{2}{x}=0$$

$$\frac{(3x+2)x}{x}-\frac{2}{x}=0$$

$$\frac{(3x+2)x-2}{x}=0$$

$$\frac{(3x^2+2x)-2}{x}=0$$

$$\frac{3x^2+2x-2}{x}=0$$

$$3x^2+2x-2=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=2^2-4\cdot 3(-2)=28$$

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1=\frac{-2-2\sqrt{7}}{2\cdot 3}=\frac{-1-\sqrt{7}}{3}; x_2=\frac{-2+2\sqrt{7}}{2\cdot 3}=\frac{-1+\sqrt{7}}{3}$$

Случай 2 .

$$3x-\frac{2}{x}=1$$

$$3x-\frac{2}{x}-1=0$$

$$3x-1-\frac{2}{x}=0$$

$$(3x-1)-\frac{2}{x}=0$$

$$\frac{(3x-1)x}{x} - \frac{2}{x} = 0$$

$$\frac{(3x-1)x-2}{x} = 0$$

$$\frac{(3x^2-x)-2}{x} = 0$$

$$\frac{3x^2-x-2}{x} = 0$$

$$3x^2-x-2=0$$

Находим дискриминант.

$$D=b^2-4ac=(-1)^2-4\cdot 3(-2)=25$$

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{D}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{1-5}{2\cdot 3} = -\frac{2}{3}; x_2 = \frac{1+5}{2\cdot 3} = 1$$

$$x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3} \text{ удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$x = -\frac{2}{3} \text{ удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3} \text{ удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$x=1 \text{ удовлетворяет ОДЗ.}$$

$$\text{Окончательный ответ: } x = \frac{-1-\sqrt{7}}{3}; x = -\frac{2}{3}; x = \frac{-1+\sqrt{7}}{3}; x = 1.$$

У меня так получилось.