

Итак, решаем задачу с параметром

15. По условию необходимо найти все значения параметра a , при которых уравнение

$$a^2 + 9|x - 3| + 3\sqrt{x^2 - 6x + 13} = 4a + 2|x - 2a - 3|$$

имеет хотя бы один корень.

Выражение внутри корня необходимо немного преобразовать:

$$x^2 - 6x + 13 = x^2 - 6x + 9 + 4 = (x - 3)^2 + 4$$

Сделаем линейную замену $t = x - 3$, а также перенесем некоторые слагаемые для более удобного рассмотрения:

$$a^2 - 4a + 3\sqrt{t^2 + 4} = 2|t - 2a| - 9|t|$$

У нас записано равенство вида $f(t) = g(t)$

Посмотрим на функцию $f(t)$: видно, что $f(-t) = f(t)$, то есть функцию четная, при отдалении от нуля t^2 увеличивается, поэтому слева от нуля функция будет убывать, справа - возрастать. Минимум находится в $t = 0$ (следует из производной $f'(t) = \frac{3 \cdot 2t}{2\sqrt{t^2 + 4}}$, которую всегда можно приравнять к 0 и найти промежутки возрастания/убывания для строго аналитического решения). Также обратим внимание, что $f(t)$ непрерывна, так как $D(f) = \mathbb{R}$ и сам корень на области определения непрерывен. Найдем минимум $f_{\min}(t) = f(0) = a^2 - 4a + 6$, он нам еще понадобится.

Теперь исследуем $g(t)$. Функция является суммой двух модулей, линейно зависящих от t , которые при раскрытии также дадут линейную зависимость от t , то есть любой кусок графика является частью линейной функции, в которой нет разрывов. Самое главное, что $g(t)$ - непрерывная функция. Важно понимать, что коэффициент при t второго модуля независимо от раскрытия первого модуля в любом случае будет "перевешивать", поэтому он и будет определять итоговый знак при t . Тогда при $t \geq 0$ коэффициент положительный, а минус перед ним дает убывание $g(t)$ на $t \geq 0$. Аналогично при $t < 0$, только наоборот, получается возрастание функции при $t < 0$. $g(t)$, в отличие от $f(t)$, сначала возрастает, в $t = 0$ перестает возрастать и потом уже начинает убывать. Найдем максимум $g_{\max}(t) = g(0) = 4| - a|$

Далее, как уже было сказано, $f(t)$ и $g(t)$ - непрерывные функции, при этом для них выполняется следующее условие:

$$f(t) \geq f_{\min}(t_1); g(t) \leq g_{\max}(t_1), t_1 = 0$$

Чтобы функции пересекались, необходимо выполнение условия $f_{\min}(t) \leq g_{\max}(t)$, в этом случае максимум меньшей функции "дотягивается" до минимума большей функции. На бесконечности левая функция всегда окажется больше правой, потому что левая там возрастает, а правая убывает и обе они непрерывны (то есть для $\forall t : |t| \geq t_0 : f(t) > g(t)$, если выразаться математически).

Теперь решаем полученное неравенство:

$$\begin{aligned} a^2 - 4a + 6 &\leq 4|-a|; b = -a \Rightarrow b^2 + 4b + 6 \leq 4|b| \Rightarrow \\ \Rightarrow \begin{cases} b^2 + 4b + 6 \leq 4b, & b \geq 0 \\ b^2 + 4b + 6 \leq -4b, & b < 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} b^2 + 6 \leq 0, & b \geq 0 \\ b^2 + 8b + 6 \leq 0, & b < 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Первое уравнение совокупности не выполняется нигде на множестве действительных чисел. А вот второе решаем: $b^2 + 8b + 6 \leq 0$

Для решения неравенства найдем нули функции $h(b) = b^2 + 8b + 6$:
 $b^2 + 8b + 6 = 0 \Rightarrow D_1 = 4^2 - 6 = 10 \Rightarrow b = -4 \pm \sqrt{10}$

При решении методом интервалов получаем знаки $+-+$, берем средний промежуток и возвращаемся к замене $b = -a$:

$$-4 - \sqrt{10} \leq -a \leq -4 + \sqrt{10} \Rightarrow 4 - \sqrt{10} \leq a \leq 4 + \sqrt{10}$$

Пишем ответ: $\boxed{a \in [4 - \sqrt{10}; 4 + \sqrt{10}]}$