Пример 45113880

Даны прямые , .

 . Требуется:

а) доказать, что прямые скрещиваются;

б) составить уравнения прямой , которая содержит **общий перпендикуляр** скрещивающихся прямых;

**Решение**:

а) Докажем, что прямые скрещиваются. Найдём точки и направляющие векторы данных прямых:

, ↔

↔

Найдём вектор:

 Вычислим [**смешанное произведение векторов**](http://mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html):

=7\*2\*1+(-3)\*(-1)\*3 + 4\*2\*4 – (-3)\*2\*1 - 7\*(-1)\*4 – 4\*2\*3 = 65.

Таким образом, векторы   не компланарны, а значит, прямые  скрещиваются, что и требовалось доказать.

б) По условию прямая  должна быть перпендикулярна прямым , а значит, её направляющий вектор  будет ортогонален направляющим векторам  . Найдём векторное произведение:

Получен вектор

**Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых** – это отрезок, соединяющий данные прямые и перпендикулярный данным прямым:


Отрезок:  – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых . Он единственный. Другого такого нет. Нам же требуется составить уравнения прямой , которая содержит данный отрезок.

Что известно о прямой «эм»? Известен её направляющий вектор

Определённый ранее. Но, к сожалению, мы не знаем ни одной точки, принадлежащей прямой «эм», не знаем и концов перпендикуляра – точек . Где эта перпендикулярная прямая пересекает две исходные прямые? Решение оформим по пунктам:

1. Перепишем уравнения первой прямой в параметрической форме:

Рассмотрим точку . Координат мы не знаем. **НО**. Если точка принадлежит данной прямой, то её координатам  соответствует **вполне конкретное значение параметра**, обозначим его через . Тогда координаты точки запишутся в виде:

Или:

1. Такую же операцию нужно осуществить над второй точкой. Перепишем уравнения второй прямой в параметрическом виде:

Если точка  принадлежит данной прямой, то **при вполне конкретном значении**её координаты должны удовлетворять параметрическим уравнениям:

Или:

3) Вектор , как и ранее найденный вектор   будет направляющим вектором прямой . Сейчас отличие состоит в том, что координаты векторов записаны с неизвестными значениям параметров. Нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Есть две точки:

Находим вектор:

:

4) Поскольку направляющие векторы  коллинеарны, то один вектор линейно выражается через другой с некоторым коэффициентом пропорциональности «лямбда»:

Или покоординатно:

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Получилась самая, что ни на есть обычная [**система линейных уравнений**](http://mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html) с тремя неизвестными , которая стандартно разрешима, например, [**методом Крамера**](http://mathprofi.ru/pravilo_kramera_matrichnyi_metod.html) |  |  |
| to  | so |  | **B** |  |
| 2 | -3 | -6 | **7** | Определитель |
| 2 | -4 | 5 | **-3** | 65 |
| -1 | -1 | -2 | **4** |  |
| Заменяем 1-й столбец на вектор результатов B: |
| **7** | -3 | -6 |  |  |
| **-3** | -4 | 5 |  | Определитель |
| **4** | -1 | -2 |  | -65 |
| Заменяем 2-й столбец на вектор результатов B: |
| 2 | **7** | -6 |  |  |
| 2 | **-3** | 5 |  | Определитель |
| -1 | **4** | -2 |  | -65 |
| Заменяем 3-й столбец на вектор результатов B: |
| 2 | -3 | **7** |  |  |
| 2 | -4 | **-3** |  | Определитель |
| -1 | -1 | **4** |  | -65 |
| to = | -65 | 65 | -1 |  |
| so= | -65 | 65 | -1 |  |
|  = | -65 | 65 | -1 |  |

Таким образом: , а «лямбда» нам не потребуется.

5) Подставим найденные значения   в наши точки:

 Направляющий вектор  особо не нужен, так как уже найден его коллега

.

6) Теперь можно составить уравнение прямой  по точке  (можно взять ) и направляющему вектору .

.