Пример 45113880

Даны прямые , .

 . Требуется:

а) доказать, что прямые скрещиваются;

б) составить уравнения прямой http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image070.gif, которая содержит **общий перпендикуляр** скрещивающихся прямых;

**Решение**:

а) Докажем, что прямые скрещиваются. Найдём точки и направляющие векторы данных прямых:

, ↔

↔

Найдём вектор:

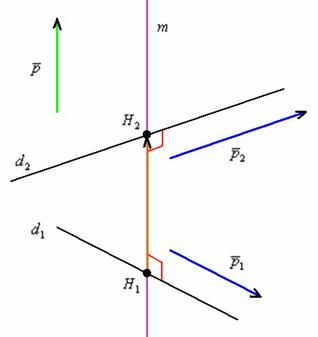
 Вычислим [**смешанное произведение векторов**](http://mathprofi.ru/vektornoe_proizvedenie_vektorov_smeshannoe_proizvedenie.html):

=7\*2\*1+(-3)\*(-1)\*3 + 4\*2\*4 – (-3)\*2\*1 - 7\*(-1)\*4 – 4\*2\*3 = 65.

Таким образом, векторы http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image080.gif  не компланарны, а значит, прямые http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image044_0001.gif скрещиваются, что и требовалось доказать.

б) По условию прямая http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image066_0002.gif должна быть перпендикулярна прямым http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image044_0004.gif, а значит, её направляющий вектор http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image088.gif будет ортогонален направляющим векторам  . Найдём векторное произведение:

Получен вектор

**Общий перпендикуляр скрещивающихся прямых** – это отрезок, соединяющий данные прямые и перпендикулярный данным прямым:  


Отрезок: http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image103.gif – общий перпендикуляр скрещивающихся прямых http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image044_0005.gif. Он единственный. Другого такого нет. Нам же требуется составить уравнения прямой http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image070_0001.gif, которая содержит данный отрезок.

Что известно о прямой «эм»? Известен её направляющий вектор

Определённый ранее. Но, к сожалению, мы не знаем ни одной точки, принадлежащей прямой «эм», не знаем и концов перпендикуляра – точек http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image105.gif. Где эта перпендикулярная прямая пересекает две исходные прямые? Решение оформим по пунктам:

1. Перепишем уравнения первой прямой в параметрической форме:

Рассмотрим точку http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image109.gif. Координат мы не знаем. **НО**. Если точка принадлежит данной прямой, то её координатам http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image111.gif соответствует **вполне конкретное значение параметра**, обозначим его через http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image113.gif. Тогда координаты точки запишутся в виде:

Или:

1. Такую же операцию нужно осуществить над второй точкой. Перепишем уравнения второй прямой в параметрическом виде:

Если точка http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image121.gif принадлежит данной прямой, то **при вполне конкретном значении**http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image123.gifеё координаты должны удовлетворять параметрическим уравнениям:

Или:

3) Вектор http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image129.gif, как и ранее найденный вектор   будет направляющим вектором прямой http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image070_0002.gif. Сейчас отличие состоит в том, что координаты векторов записаны с неизвестными значениям параметров. Нужно из координат конца вектора вычесть соответствующие координаты начала вектора.

Есть две точки:

Находим вектор:

:

4) Поскольку направляющие векторы http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image136.gif коллинеарны, то один вектор линейно выражается через другой с некоторым коэффициентом пропорциональности «лямбда»:

Или покоординатно:

|  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| Получилась самая, что ни на есть обычная [**система линейных уравнений**](http://mathprofi.ru/kak_reshit_sistemu_uravnenii.html) с тремя неизвестными , которая стандартно разрешима, например, [**методом Крамера**](http://mathprofi.ru/pravilo_kramera_matrichnyi_metod.html) | | | | | | | | | | |  |  |
| to | | so | | |  | | **B** |  | |
| 2 | | -3 | | | -6 | | **7** | Определитель | |
| 2 | | -4 | | | 5 | | **-3** | 65 | |
| -1 | | -1 | | | -2 | | **4** |  | |
| Заменяем 1-й столбец на вектор результатов B: | | | | | | | | |
| **7** | -3 | | -6 |  | |  | | |
| **-3** | -4 | | 5 |  | | Определитель | | |
| **4** | -1 | | -2 |  | | -65 | | |
| Заменяем 2-й столбец на вектор результатов B: | | | | | | | | |
| 2 | **7** | | -6 |  | |  | | |
| 2 | **-3** | | 5 |  | | Определитель | | |
| -1 | **4** | | -2 |  | | -65 | | |
| Заменяем 3-й столбец на вектор результатов B: | | | | | | | | |
| 2 | -3 | | **7** |  | |  | | |
| 2 | -4 | | **-3** |  | | Определитель | | |
| -1 | -1 | | **4** |  | | -65 | | |
| to = | -65 | | 65 | -1 | |  | | |
| so= | -65 | | 65 | -1 | |  | | |
| = | -65 | | 65 | -1 | |  | | |

Таким образом: , а «лямбда» нам не потребуется.

5) Подставим найденные значения   в наши точки:

 Направляющий вектор http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image129_0000.gif особо не нужен, так как уже найден его коллега

.

6) Теперь можно составить уравнение прямой http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image070_0003.gif по точке  (можно взять http://mathprofi.ru/d/zadachi_s_pryamoi_v_prostranstve_clip_image166.gif) и направляющему вектору .

.