**Квадратична функція, її графік і властивості**

**Означення.** **Функцію, яку можна задати формулою виду *y* = *ax*2 + *bx* + *c*, де *a*, *b* і *c* — деякі числа, причому *a* ≠ 0, *x* — незалежна змінна, називають квадратичною**.

Квадратична функція не є для вас новою. Так, у 8 класі ви вивчали її частково — функцію *y* = *x*2. Функціональна залежність площі *S* круга від його радіуса *r* визначає квадратичну функцію *S*(*r*) = π*r*2, яка в свою чергу є окремим видом функції *y* = *ax*2.

На уроках фізики ви ознайомилися з формулою *h* = *v*0*t* – , яка визначає залежність висоти *h*, на якій знаходиться тіло, що кинули вертикально вгору з початковою швидкістю *v*0, від часу руху *t*. Ця формула задає квадратичну функцію *h*(*t*) = *v*0*t* – .

Покажемо, як графік квадратичної функції *y* = *ax*2 + *bx* + *c* можна отримати з графіка функції *y* = *ax*2.

Ви вже будували графіки функцій виду *y* = *ax*2 + *bx* + *c*, виділяючи квадрат двочлена. Використаємо цей прийом у загальному вигляді.

Маємо:

*ax*2 + *bx* + *c* = 

= 

Введемо позначення , .

Тоді формулу *y* = *ax*2 + *bx* + *c* можна подати у вигляді:

*y* = *a*(*x* – *x*0)2 + *y*0.

Отже, схема побудови шуканого графіка є такою:

|  |  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- | --- |
| *y* = *ax*2 | управо або вліво img007на | *x*0 | од. | *y* = *a*(*x* – *x*0)2 | угору або внизimg008на | *y*0 | од. | *y* = *a*(*x* – *x*0)2 + *y*0 |

Графіком функції *y* = *ax*2 + *bx* + *c* є парабола з вершиною в точці (*x*0; *y*0), де , , яка дорівнює параболі *y* = *ax*2.

Зрозуміло, що вітки параболи *y* = *ax*2 + *bx* + *c* направлені так само, як і параболи *y* = *ax*2: якщо *a* > 0, то вітки параболи направлені вгору, якщо *a* < 0, то вітки параболи направлені вниз.

Загальне уявлення про графік квадратичної функції дають координати вершини параболи і напрям її віток. Це уявлення буде тим повнішим, чим більше точок, які належать графіку, ми знатимемо. Тому, не використовуючи зсувів, можна побудувати графік квадратичної функції за такою схемою:

1) знайти абсцису вершини параболи за формулою ;

2) за формулою , де *D* — дискримінант квадратного тричлена *ax*2 + *bx* + *c*, знайти ординату вершини параболи і позначити на координатній площині вершину;

(примітка. Формулу  запам’ятовувати необов’язково. Достатньо обчислити значення функції *y* = *ax*2 + *bx* + *c* в точці з абсцисою );

3) визначити напрям віток параболи;

4) знайти координати ще кількох точок, які належать шуканому графіку (зокрема, координати точки перетину параболи з віссю *y* та нулі функції, якщо вони існують);

5) позначити на координатній площині знайдені точки і сполучити їх плавною лінією.

У таблиці наведено деякі властивості квадратичної функції *y* = *ax*2 + *bx* + *c*.

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| Властивість | *a* > 0 | *a* < 0 |
| Область визначення | (–∞; +∞) | (–∞; +∞) |
| Область значень | img015 | img016 |
| Зростає на проміжку | img017 | img018 |
| Спадає на проміжку | img019 | img020 |

**Приклад**.

Побудуйте графік функції *f*(*x*) = *x*2 + 4*x* – 5. Користуючись графіком функції, знайдіть область значень функції, проміжки зростання і спадання, проміжки знакосталості, найменше і найбільше значення функції.

*Розв’язання*.

Дана функція є квадратичною функцією *y* = *ax*2 + *bx* + *c*,

 *a* = 1, *b* = 4, *c* = –5.

Її графіком є парабола, вітки якої напрямлені вгору (*a* > 0).

Абсциса вершини параболи *x*0 = – = – = –2,

ордината вершини *y*0 = *f*(*x*0) = *f*(–2) = 4 – 8 – 5 = –9.

Отже, точка (–2; –9) — вершина параболи.

Знайдемо точки перетину параболи з віссю абсцис:

*x*2 + 4*x* – 5 = 0;

*x*1 = –5, *x*2 = 1.

Отже, парабола перетинає вісь абсцис у точках (–5; 0) і (1; 0).

Знайдемо точку перетину параболи з віссю ординат: *f*(0) = –5.

Парабола перетинає вісь ординат у точці (0; –5).

Позначимо знайдені чотири точки параболи на координатній площині:



Тепер зрозуміло, що зручно знайти значення даної функції в точках –1, –3, – 4 і, позначивши відповідні точки на координатній площині, провести через усі знайдені точки графік даної функції.

Маємо: *f*(–3) = *f*(–1) =  –8; *f*(– 4) = *f*(0) = –5.

Шуканий графік зображено на рисунку :



Область значень функції *E*(*f*) = [–9; +).

Функція зростає на проміжку [–2; +) і спадає на проміжку (–; –2].

*f*(*x*) > 0 при *x* < –5 або *x* > 1; *f*(*x*) < 0 при –5 < *x* < 1.

Найменше значення функції дорівнює –9, найбільшого значення не існує.