(1 балл) **Используя формулы для дополнительных углов, упростите выражен**
и найдите его значение:

а) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{3\pi}{2}+\dfrac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(4\pi+\dfrac{\alpha}{6}\right)-\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\alpha}{6}\right)}$, **если** $\alpha=\pi$;

$$\frac{\sin\left(\frac{3\pi}{2}+\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(4\pi+\frac{\alpha}{6}\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{6}\right)}=\frac{-cos\left(\frac{\alpha}{3}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{6}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right)}=\frac{-cos^2\left(\frac{\alpha}{6}\right)+\sin^2\left(\frac{\alpha}{6}\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{6}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right)}=$$

$$=\frac{\left(\sin\left(\frac{\alpha}{6}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right)\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{6}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right)\right)}{\sin\left(\frac{\alpha}{6}\right)-\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right)}=\sin\left(\frac{\alpha}{6}\right)+\cos\left(\frac{\alpha}{6}\right)=\sin\left(\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}=$$

$$=\frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

б) $\dfrac{\sin\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)-\mathrm{tg}\left(\dfrac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)+1}$, **если** $\mathrm{tg}\,\alpha=3$.

$$\frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-tg\ \left(\frac{3\pi}{2}-\alpha\right)}{\sin(\pi+\alpha)+1}=\frac{\cos\alpha-ctg\ \alpha}{-\sin\alpha+1}=\frac{\cos\alpha-\frac{cos\ \alpha}{\sin\alpha}}{1-\sin\alpha}=\frac{\cos\alpha\ \sin\alpha-\cos\alpha}{\sin\alpha\,(1-\sin\alpha)}=$$

$$=\frac{\cos\alpha\ (\sin\alpha-1)}{-\sin\alpha\,(\sin\alpha-1)}=-\frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}=-ctg\ \alpha=-\frac{1}{tg\ \alpha}=-\frac{1}{3}$$

Докажите справедливость равенства $2\sin\left(2\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\alpha-\dfrac{\pi}{4}\right)=-\cos4\alpha$.

$$2\sin\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)\cdot\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\left(\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}-2\alpha+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(2\alpha+\frac{\pi}{4}+2\alpha-\frac{\pi}{4}\right)\right)=$$

$$=cos\frac{\pi}{2}-\cos4\alpha=0-\cos4\alpha=-\cos4\alpha$$

Что и требовалось доказать.

(3 балла) **Упростите выражение:**

а) $\dfrac{\cos5\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha}{\sin5\alpha+\sin6\alpha+\sin7\alpha}$;

$$\frac{\cos5\alpha+\cos6\alpha+\cos7\alpha}{\sin5\alpha+\sin6\alpha+\sin7\alpha}=\frac{(\cos7\alpha+\cos5\alpha)+\cos6\alpha}{(\sin7\alpha+\sin5\alpha)+\sin6\alpha}=\frac{2\cos\frac{7\alpha+5\alpha}{2}\cos\frac{7\alpha-5\alpha}{2}+\cos6\alpha}{2\sin\frac{7\alpha+5\alpha}{2}\sin\frac{7\alpha-5\alpha}{2}+\sin6\alpha}=$$

$$=\frac{2\cos6\alpha\cos\alpha+\cos6\alpha}{2\sin6\alpha\sin\alpha+\sin6\alpha}=\frac{\cos6\alpha\,(\cos\alpha+1)}{\sin6\alpha\,(\sin\alpha+1)}=\frac{ctg\ 6\alpha\,(\cos\alpha+1)}{\sin\alpha+1}$$

Какой-то не очень красивый ответ получился. Наверно, что-то не так сделал.

б) $\dfrac{\sin^3\alpha+\cos^3\alpha}{1-\dfrac{\sin2\alpha}{2}}\cdot(\cos\alpha-\sin\alpha)$.

Применяем формулу суммы кубов двух чисел

$$\frac{sin^3\alpha + cos^3\alpha}{1-\frac{\sin 2\alpha}{2}} \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha) = \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(sin^2\alpha - \sin\alpha\cos\alpha + \ cos^2\alpha)}{1-\frac{2\sin\alpha\cos\alpha}{2}} \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha) =$$

$$= \frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha} \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha)$$

Выражение $1-\sin\alpha\cos\alpha$ неравно нулю при любых альфа. Поэтому можно сократить

$$\frac{(\sin\alpha + \cos\alpha)(1-\sin\alpha\cos\alpha)}{1-\sin\alpha\cos\alpha} \cdot (\cos\alpha - \sin\alpha) = (\sin\alpha + \cos\alpha)\cdot(\cos\alpha - \sin\alpha) = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha =$$

$$= \cos 2\alpha$$