Составить уравнение плоскости, проходящей через точки M(3;2;1) и N(5;4;3). Параллельно оси OZ.

РЕШЕНИЕ

Есть мысль, использовать уравнение плоскости в виде

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ [1]

Где A, B, C — координаты вектора, направленного из начала координат перпендикулярно данной плоскости, а x_0, y_0, z_0 — координаты некоторой фиксированной точки, принадлежащей данной плоскости. В качестве данной точки можно например рассмотреть точку M. С учётом данного утверждения уравнен [1] принимает вид

$A(x-3)+B(y-2)+C(z-1)=0$ [2]

Осталось определить координаты нормального вектора.

$\vec{n}=(A; B; C)$ [3]

Замечаем, что вектор нормальный к искомой плоскости должен быть перпендикулярен вектору $\overrightarrow{MN}$ (поскольку данный вектор должен лежать в заданной плоскости), а так же перпендикулярен любому вектору лежащему на оси OZ (которая по условию параллельна искомой плоскости). Для определенности будем рассматривать в качестве вектора на оси OZ единичный вектор $\vec{k}=(0; 0; 1)$. Координаты вектора $\overrightarrow{MN}$ определить не составит труда

$\overrightarrow{MN}=(5-3; 4-2; 3-1)=(2; 2; 2)$ [4]

Как известно, если векторы перпендикулярны, то их скалярное произведение равно 0. Запишем выражения для скалярных произведений $(\vec{k}\cdot\vec{n})$ и $(\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n})$ в «координатном» виде

$(\overrightarrow{MN}\cdot\vec{n})=2A+2B+2C=0$ [5]

$(\vec{k}\cdot\vec{n})=0\cdot A+0\cdot B+1\cdot C=C=0$ [6]

Как следует из [6] z координата вектора $\vec{n}$ сразу однозначно определилась. C=0.

Соответственно из [5] с учётом [6] следует

$A=-B$ [7]

А вот далее следует шаг которым может смутить на первый, непросвещенный взгляд. Координату A можно выбрать ***произвольно*** а затем по ней определить B . Допустим $A=1$. Тогда уравнение искомой плоскости можно записать в виде:

$(x-3)-(y-2)=0$ [8]

Кажется что для различных A мы будем получать уравнения различных плоскостей. Однако есть такая теорема.

Если два уравнения :

$A_1 x+B_1 y+C_1 z+D_1=0$ и $A_2 x+B_2 y+C_2 z+D_2=0$ задают одну и ту же плоскость, то их коэффициенты пропорциональны. Т. е.

$$\begin{aligned} A_2&=\mu A_1\\ B_2&=\mu B_1\\ C_2&=\mu C_1\\ D_2&=\mu D_1 \end{aligned} \quad [9]$$

Заметим также, что уравнение вида

$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$ [1]

достаточно просто приводится к виду

$\tilde{A}x+\tilde{B}y+\tilde{C}z+\tilde{D}=0$

Достаточно просто в [1] раскрыть скобки, перегруппировать слагаемые и обозначить

$$\begin{aligned} \tilde{A}&=A\\ \tilde{B}&=B\\ \tilde{C}&=C\\ \tilde{D}&=-(A x_0+B x_0+C x_0) \end{aligned}$$

Теперь можно просто продемонстрировать, что если как следует из [2] , [5], [6] мы строим уравнение плоскости по правилу

$A(x-3)-A(y-2)=0$ [10]

то для любого A мы получаем уравнение одной и той же плоскости. Рассмотрим два различных значения A_1 и A_1. Коэффициенты уранения

$$\tilde{A}_1 = A_1$$
$$\tilde{B}_1 = -A_1$$
$$\tilde{C}_1 = 0$$
$$\tilde{D}_1 = -(3A_1 - 2A_1) = -A_1$$

$$\tilde{A}_2 = A_2$$
$$\tilde{B}_2 = -A_2$$
$$\tilde{C}_2 = 0$$
$$\tilde{D}_2 = -A_2$$

Очевидно, что:

$$\tilde{A}_2 = \mu \tilde{A}_1$$
$$\tilde{B}_2 = \mu \tilde{B}_1$$
$$\tilde{C}_2 = \mu \tilde{C}_1$$
$$\tilde{D}_2 = \mu \tilde{D}_1$$

где $\mu = \frac{A_2}{A_1}$

Таким образом можно остановится например на уравнении [8]

ОТВЕТ

$(x-3)-(y-2)=0$ Или в более общем виде

$A[(x-3)-(y-2)]=0$ где А произвольное число.