

$$10) \begin{cases} (xy)^{1,5} + 1 = x\sqrt{y} + y\sqrt{x} \\ y^2 + 100 = 10y(z^x - \bar{z}^x) \end{cases}$$

Рассмотрим первое уравнение. В этом уравнении $x \geq 0$ и $y \geq 0$. Очевидно, что решением этого уравнения является пара $\begin{cases} x=1 \\ y=1 \end{cases}$. Это уравнение имеет решение, когда $x = k/y$ или $y = k/x$, где $k > 0$ - коэффициент пропорциональности, т.е. уравнение может иметь две пары корней: если $y=a$, то $x=k/a$ и если $x=a$, то $y=k/a$.

Рассмотрим второе уравнение. Это типичное квадратное уравнение $y^2 - 10(z^x - \bar{z}^x)y + 100 = 0$

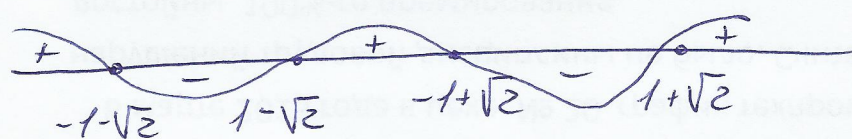
Это уравнение может иметь два корня при $D > 0$

$$D = 100(z^x - \bar{z}^x)^2 - 400 > 0 \Rightarrow 100(z^x - \bar{z}^x)^2 > 400 \Rightarrow$$

$$(z^x - \bar{z}^x)^2 > 4 \Rightarrow (z^x - \bar{z}^x)^2 - 4 > 0 \Rightarrow (z^x - \bar{z}^x - 2)(z^x - \bar{z}^x + 2) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z^{2x} - 2 \cdot z^x - 1)(z^{2x} + 2 \cdot z^x - 1) > 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (z^x - 1 - \sqrt{2})(z^x - 1 + \sqrt{2})(z^x + 1 - \sqrt{2})(z^x + 1 + \sqrt{2}) > 0$$



$z^x < -1 - \sqrt{2}$ т.к. $z > 0$, то $z^x > 0$ при всех значениях x ; решение не имеет

$1 - \sqrt{2} < z^x < -1 + \sqrt{2}$ т.к. $x > 0$ по ОДЗ, то $z^x > 1$; решение не имеет

$$z^x > 1 + \sqrt{2} \quad x > \log_2(1 + \sqrt{2})$$

Корни уравнения: $y_1 = \frac{10(z^x - \bar{z}^x) + \sqrt{D}}{2}$

$y_2 = \frac{10(z^x - \bar{z}^x) - \sqrt{D}}{2}$ по ОДЗ $y > 0$, значит

$$10(z^x - \bar{z}^x) - \sqrt{D} > 0 \Rightarrow 10(z^x - \bar{z}^x) > \sqrt{D} \Rightarrow$$

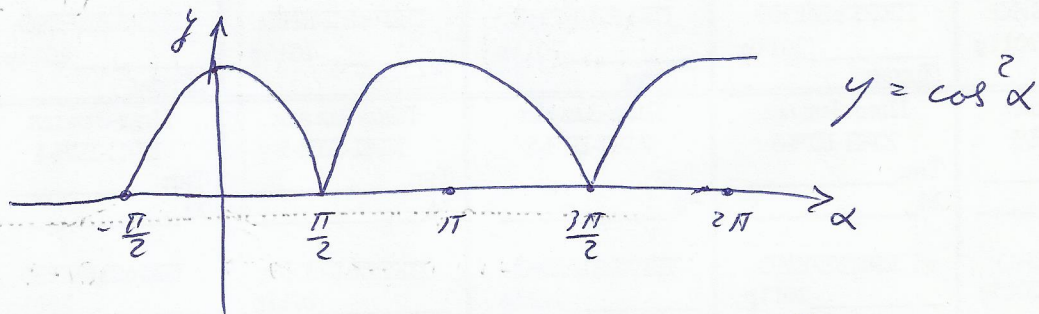
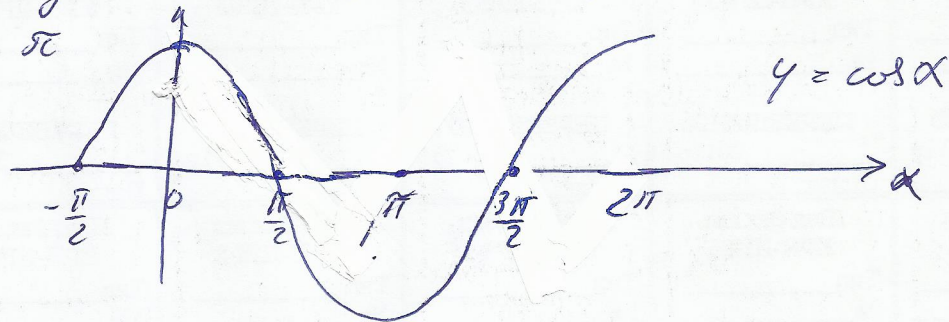
$$\Rightarrow 100(z^x - \bar{z}^x)^2 > D \Rightarrow 100(z^x - \bar{z}^x)^2 > 100(z^x - \bar{z}^x)^2 - 400 \Rightarrow 0 > -400$$

т.е. решение справедливо при всех значениях x и уравнение может иметь два положительных корня. Но, поскольку $x > 1$, то $y = \frac{k}{x}$ должна быть, по крайней мере, меньше x . Тому условию удовлетворяет только корень y_2 .

Из вышесказанного заключаем, что система уравнений имеет только одну пару корней. И эта пара $\begin{cases} x = 9,9515 \\ y = 0,0101 \end{cases}$ найдена проверкой.

7) $y = \cos^2(a^2 - 4a)x$ период $= \frac{\pi}{4}$

Функция $y = \cos^2 x$ — функция периодическая с периодом π



$$y = \cos^2[(a^2 - 4a)x] = \cos^2[(a^2 - 4a)(x + \frac{\pi}{4}k)] =$$

$$= \cos^2[(a^2 - 4a)x + \frac{\pi(a^2 - 4a)}{4}k]$$

$$\frac{\pi(a^2 - 4a)}{4}k = \pi k \Rightarrow a^2 - 4a = 4 \Rightarrow a^2 - 4a - 4 = 0$$

$$a = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 16}}{2} = \frac{4 \pm 4\sqrt{2}}{2} = 2 \pm 2\sqrt{2}$$

и так, $\begin{cases} a = 2 + 2\sqrt{2} \\ a = 2 - 2\sqrt{2} \end{cases}$