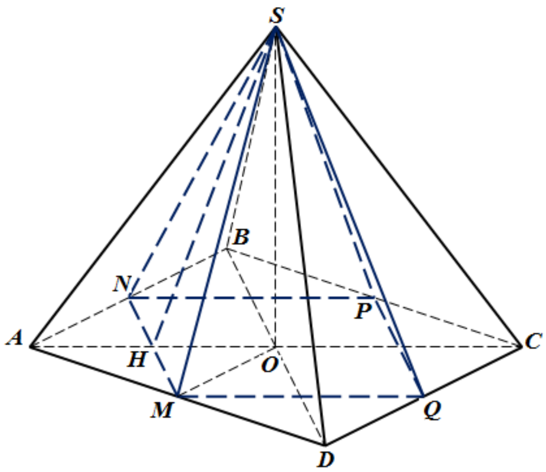
902. В правильной четырёхугольной пирамиде $SABCD$ с вершиной S сторона основания равна 3, а тангенс двугранного угла между боковой гранью и плоскостью основания равен 2. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды $SMNPQ$, где M, N, P, Q — середины сторон основания.



Т.к. M, N, P, Q – середины сторон основания $ABCD$ правильной четырёхугольной пирамиды $SABCD$, то боковые рёбра пирамиды $SMNPQ$ SM, SN, SP, SQ – апофемы боковых граней правильной пирамиды $SABCD$ и поэтому они равны между собой. Основание пирамиды $SMNPQ$ пирамиды – четырёхугольник $MNPQ$, у которого все стороны равны как гипотенузы равных равнобедренных треугольников ANM, BPN, CQP и DMQ. Далее,

$$\angle MNP = 180° - \angle ANM - \angle BNP = 180° - 45° - 45° = 90.$$

Поэтому $MNPQ$ – квадрат. Значит, пирамида $SMNPQ$ – правильная, и чтобы найти площадь её боковой поверхности, достаточно найти площадь одной боковой грани и умножить эту площадь на 4.

Основание $ABCD$ пирамиды $SABCD$ и основание $MNPQ$ пирамиды $SMNPQ$ лежат в одной плоскости, у этих пирамид общая вершина S и значит, общая высота SO. Двугранный угол между боковой гранью ASD пирамиды $SABCD$ и плоскостью основания измеряется плоским углом SMO между апофемой SM и её проекцией OM: $\operatorname{tg}(\angle SMO) = \dfrac{SO}{OM} = 2 \Rightarrow SO = 2OM$; $OM = \dfrac{1}{2}AB = 1{,}5$ как средняя линия треугольника ABD; $SO = 3$. $NM = \dfrac{1}{2}BD = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. $AO = \dfrac{1}{2}AC = \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$. $AN = NB$ и $NM \parallel BD$ как средняя линия треугольника ABD, значит, NH – средняя линия треугольника ABO, поэтому $AH = OH = \dfrac{1}{2}AO = \dfrac{3\sqrt{2}}{4}$.

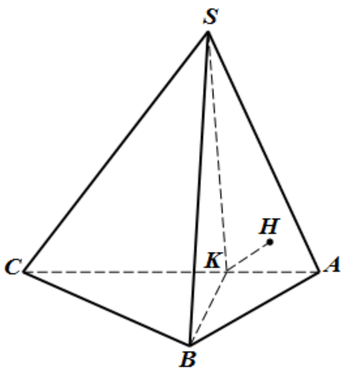
$AN = AM$ как половины равных сторон AB и AD, т.е. ΔANM – равнобедренный, $AH \perp NM$, значит, AH – высота и медиана треугольника ANM: $NH = HM$, и поэтому SH – медиана и высота треугольника NSM. По теореме Пифагора:

$$NH^2 = SO^2 + OH^2 = 3^2 + \left(\frac{3\sqrt{2}}{4}\right)^2 = 9 + \frac{9}{8} = \frac{81}{8} \Rightarrow NH = \frac{9}{2\sqrt{2}} = \frac{9\sqrt{2}}{4}.$$

Боковая поверхность пирамиды $SMNPQ$:

$$S_{бок} = 4S_{\Delta NSM} = 4 \cdot \frac{NM \cdot SH}{2} = 2 \cdot \frac{3\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{9\sqrt{2}}{4} = \frac{27}{2} = 13{,}5.$$

903. В пирамиде $SABC$ основанием служит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом B. В треугольнике ABC проведена биссектриса BK, причём оказалось, что SK — высота пирамиды. Известно, что $AB = 2$, $BC = 4$, $SK = 1$. Найдите расстояние от точки K до плоскости ABS.



По свойству биссектрисы

$$\frac{CK}{AK} = \frac{BC}{AB} = \frac{4}{2} = 2 \Rightarrow CK = 2AK,\ AC = CK + AK = 3AK.$$

У треугольников *ABC* и *ABK* общая высота из вершины *B*, но основание *AK* в 3 раза меньше основания *AC*, поэтому площадь треугольника *ABK* в 3 раза меньше площади треугольника *ABC*. У пирамид *SABC* и *SABK* общая высота *SK*, но площадь основания *ABK* пирамиды *SABK* в 3 раза меньше основания *ABC* пирамиды *SABC*:

$$V_{SABK} = \frac{1}{3}V_{SABC} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\cdot\frac{AB\cdot BC}{2}\cdot SK\right) = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2\cdot 4}{2}\cdot 1 = \frac{4}{9}.$$

KH – перпендикуляр к плоскости *ABS*, его длина – расстояние от точки *K* до плоскости *ABS*. Если принять *ABS* за основание пирамиды *SABK*, а *KH* – за её высоту, то $V_{SABK} = \frac{1}{3}S_{ABS}\cdot KH = \frac{4}{9}$, и $KH = \frac{4}{3S_{ABS}}$.

По теореме Пифагора $AC^2 = AB^2 + BC^2 = 2^2 + 4^2 = 20 \Rightarrow AC = \sqrt{20} \Rightarrow AK = \frac{\sqrt{20}}{3}$.

$$AS^2 = AK^2 + SK^2 = \frac{20}{9} + 1 = \frac{29}{9} \Rightarrow AS = \frac{\sqrt{29}}{3}.$$

По формуле длины биссектрисы $BK = \frac{2AB\cdot BC\cdot\cos\frac{\beta}{2}}{AB + BC}$, где $\beta = \angle ABC = 90^\circ$. Поэтому $BK = \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot\cos 45^\circ}{2+4} = \frac{16}{6}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{4\sqrt{2}}{3}$. Снова по теореме Пифагора:

$$BS^2 = BK^2 + SK^2 = \left(\frac{4\sqrt{2}}{3}\right)^2 + 1 = \frac{32}{9} + 1 = \frac{41}{9} \Rightarrow BS = \frac{\sqrt{41}}{3}.$$

Сильно не хочется считать площадь треугольника *ASB* по формуле Герона, а как это сделать по-другому – не вижу! Тем более не вижу, как ещё можно решить эту задачу! После многочасового «ступора» продолжаю…

$p = \frac{1}{2}(AB + BS + AS) = \frac{1}{2}\cdot\left(2 + \frac{\sqrt{41}}{3} + \frac{\sqrt{29}}{3}\right) = \frac{6 + \sqrt{41} + \sqrt{29}}{6}$ (*p* – полупериметр);

$$p - AB = \frac{6 + \sqrt{41} + \sqrt{29}}{6} - 2 = \frac{\sqrt{41} + \sqrt{29} - 6}{6};$$

$$p - AS = \frac{6+\sqrt{41}+\sqrt{29}}{6} - \frac{\sqrt{29}}{3} = \frac{6+(\sqrt{41}-\sqrt{29})}{6};$$

$$p - BS = \frac{6+\sqrt{41}+\sqrt{29}}{6} - \frac{\sqrt{41}}{3} = \frac{6-(\sqrt{41}-\sqrt{29})}{6};$$

$$p(p-AB) = \frac{(\sqrt{41}+\sqrt{29})^2-36}{36} = \frac{41+2\sqrt{41}\cdot\sqrt{29}+29-36}{36} = \frac{34+2\sqrt{41}\cdot\sqrt{29}}{36};$$

$$(p-AS)(p-BS) = \frac{36-\left(\sqrt{41}-\sqrt{29}\right)^2}{36} = \frac{36-\left(41-2\sqrt{41}\cdot\sqrt{29}+29\right)}{36} = \frac{2\sqrt{41}\cdot\sqrt{29}-34}{36};$$

$$p(p-AB)(p-AS)(p-BS) = \frac{2\cdot 41\cdot 29-34^2}{36^2} = \frac{1222}{36^2};$$

$$S_{ABS} = \frac{\sqrt{1222}}{36};\; KH = \frac{4}{3S_{ABS}} = \frac{4\cdot 36}{3\sqrt{1222}} = \frac{48}{\sqrt{1222}} \approx 1{,}373111.$$