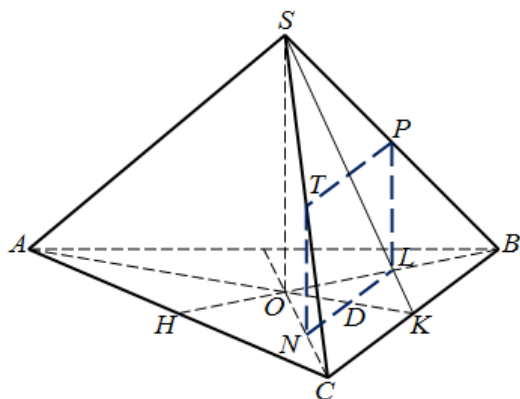


В правильной треугольной пирамиде $SABC$ высота равна 12, а апофема равна 20. Точки P и T – середины рёбер SB и SC соответственно. Плоскость α содержит прямую PT и параллельна высоте пирамиды SH .

а) Докажите, что плоскость α делит высоту основания BH в отношении 1 : 2, считая от точки B .

б) Найдите расстояние от точки B до плоскости α .



а) SO – высота пирамиды $SABC$. Т.к. пирамида – правильная, то O – точка пересечения высот основания ABC . PT – средняя линия треугольника BSC , и поэтому $PT \parallel BC$.

$P \in \alpha$ и $P \in (BSO) \Rightarrow \alpha$ и (BSO) пересекаются по прямой PL , и т.к. $\alpha \parallel SO$, то $PL \parallel SO$. При этом $L \in \alpha$ и $L \in (BSO)$, т.е. $L \in BO$.

$PL \parallel SO$ и $SP = PB \Rightarrow PL$ – средняя линия треугольника BSO , и $OL = BL$. Точка O лежит на вы-

соте BH , поэтому $BO = \frac{2}{3}BH$;

$$BL = OL = \frac{1}{2}BO = \frac{1}{3}BH; \quad LH = BH - BL = BH - \frac{1}{3}BH = \frac{2}{3}BH;$$

$$BL : LH = \frac{1}{3}BH : \frac{2}{3}BH = 1 : 2.$$

б) $T \in \alpha$ и $T \in (CSO) \Rightarrow \alpha$ и (CSO) пересекаются по прямой TN , и т.к. $\alpha \parallel SO$, то $TN \parallel SO$. При этом $T \in \alpha$ и $N \in (CSO)$, т.е. $N \in CO$. $SO \perp (ABC)$; $PL \parallel SO$; $TN \parallel SO \Rightarrow PL \perp (ABC)$ и $TN \perp (ABC) \Rightarrow \alpha \perp (ABC)$.

PL – средняя линия треугольника $OSB \Rightarrow OL = LB$. TN – средняя линия треугольника $OSC \Rightarrow ON = NC \Rightarrow NL$ – средняя линия треугольника BOC и $NL \parallel BC$, т.е. взаимно перпендикулярные плоскости ABC и α пересекаются по прямой, параллельной стороне BC . Поэтому расстояние от точки B до плоскости α равно расстоянию до плоскости α от любой другой точки прямой BC . Удобнее всего для нахождения этого расстояния взять точку K высоты основания AK . В самом деле, $AK \perp BC$, $NL \parallel BC$, значит $AK \perp NL$, $AK \perp SO$, $PL \parallel SO$ и $AK \perp PL \Rightarrow AK \perp \alpha$. Поэтому KD – расстояние от прямой BC до плоскости α , а значит, и расстояние от точки B до плоскости α . $SK = 20$ как апофема боковой грани BSC . По теореме Пифагора

$$OK = \sqrt{SK^2 - SO^2} = \sqrt{20^2 - 12^2} = \sqrt{400 - 144} = \sqrt{256} = 16.$$

$$KD = \frac{1}{2}OK = 8.$$

Расстояние от точки B до плоскости α равно 8.