Для любого K существует n с ровно K простыми делителями, для которых $n|2^n+1$. Поскольку если $n|2^n+1$, где $n = q^\alpha \cdot m$, причем q - наибольший простой делитель n, то и $m|2^m+1$. Действительно, достаточно доказать, что $m|2^n+1 \implies m|2^m+1$. Если положить $d = ord_m(-2)$ (m нечетно), то всякий раз, когда $m|2^\ell+1$ для нечетного ℓ, имеем $(-2)^\ell \equiv 1 \pmod m$ и, следовательно, $d|\ell$. Поскольку $n|2^n+1$, то n должно быть нечетным, но тогда $d|n$. Тем не менее, по Эйлеру-Фермату, $d|\varphi(m)$ относительно простого q^α, так как мы выбрали q больше любого простого делителя m, значит, он больше и простых делителей $\varphi(m)$. Но $gcd(q^\alpha, d) = 1$ означает, что из $d|n$ следует $d|m$, следовательно, $(-2)^m \equiv 1 \pmod m$, то есть $m|2^m+1$ (m нечетно)

Зададим $f(n) = 2^n+1$. Заметим, что из $n|f(n)$ следует $f(n)|f(f(n))$, так как если $f(n) = n \cdot N$, то $f(f(n)) = 2^{f(n)}+1 = (2^n)^N+1$ делится на 2^n+1, поскольку N нечетно. Если $p|f(n)$, то в силу возрастания экспоненты

$$v_p(f(f(n))) = v_p((2^n)^N+1) = v_p(2^n+1)+v_p(N) \le 2 \cdot v_p(f(n)) \Rightarrow \prod_{p|f(n)} p^{v_p(f(f(n)))} | f(n)^2$$

Но у нас есть $m^2 < 2^m+1$ для целых чисел $m \ge 4$

Доказательство: Для $m = 4$, $16 = 4^2 < 2^4+1 = 17$. Если это верно для некоторого m, то это верно и для $(m+1)$. Для этого заметим, что $(m+1)^2-1 \le 2(m^2-1)$ эквивалентно $0 \le m^2-2m-2 = (m-1)^2-3$, что справедливо для $m \ge 4$, а отсюда следует, что

$$(m+1)^2-1 \le 2(m^2-1) < 2 \cdot 2^m = 2^{m+1} \quad \square$$

Так, если $f(n) \ge 4$, то $f(f(n))$ имеет простой делитель, который не делит $f(n)$. Но между тем он несет на себе все простые делители $f(n)$, так как $f(n)$ его делит. Поэтому в последовательности $f(3), f(f(3)), \ldots$ каждый член делит следующий член (по индукции, из $3|f(3) = 9$), и каждый член не меньше 4, следовательно, по нашему предыдущему наблюдению, число простых делителей членов строго возрастает. Остается взять член, скажем, K-ый член, имеющий не менее K простых делителей, и отрезать от его факторизации наибольший простой делитель, пока не останется ровно K простых делителей